CONCEPTOS BÁSICOS

1

ECUACIONES DIFERENCIALES

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas.

EJEMPLO 1.1. Las siguientes son ecuaciones diferenciales que incluyen la función desconocida y.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \tag{1.1}$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \tag{1.2}$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\operatorname{sen} x)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1.5}$$

Una ecuación diferencial es una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) si la función desconocida depende solamente de una variable independiente. Si la función desconocida depende de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial es una *ecuación diferencial parcial* (EDP). *Con excepción de los capítulos 31 y 34, el enfoque principal de este libro será sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.*

EJEMPLO 1.2. De las ecuaciones (*1.1*) a la (*1.4*) son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias, pues la función desconocida y depende únicamente de la variable x. La ecuación (*1.5*) es una ecuación diferencial parcial, pues y depende tanto de la variable t como de la x.

El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

EJEMPLO 1.3. La ecuación (*1.1*) es una ecuación diferencial de primer orden; (*1.2*), (*1.4*) y (*1.5*) son ecuaciones diferenciales de segundo orden. [Obsérvese en (*1.4*) que el orden de la mayor *derivada* que aparece en la ecuación es dos.] La ecuación (*1.3*) es una ecuación diferencial de tercer orden.

NOTACIÓN

Las expresiones y', y'', y''', $y^{(4)}$, ..., $y^{(n)}$ se usan a menudo para representar respectivamente a la primera, la segunda, la tercera, la cuarta, ..., la n-ésima derivada de y con respecto a la variable independiente en consideración. De este modo, y'' representa d^2y/dx^2 si la variable independiente es x, pero con d^2y/dp^2 se representa que la variable independiente es p. Obsérvese que los paréntesis se usan en $y^{(n)}$ para distinguirla de la n-ésima potencia, y^n. Si la variable independiente es tiempo, generalmente denotado por t, las comillas a menudo se reemplazan por puntos. Así, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ y $\dddot{y}$ representan dy/dt, d^2y/dt^2 y d^3y/dt^3, respectivamente.

SOLUCIONES

Una *solución* de una ecuación diferencial en la función y desconocida y la variable independiente x en el intervalo $\mathcal{I}$, es una función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial de manera idéntica para toda x en $\mathcal{I}$.

EJEMPLO 1.4. ¿Es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$ una solución de $y'' + 4y = 0$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias?

Derivando y, tenemos que

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \operatorname{sen} 2x \quad \text{y} \quad y'' = -4c_1 \operatorname{sen} 2x - 4c_2 \cos 2x$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \operatorname{sen} 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1)\operatorname{sen} 2x + (-4c_2 + 4c_2)\cos 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por esto, $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$ satisface la ecuación diferencial para todos los valores de x y es una solución en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 1.5. Determine si $y = x^2 - 1$ es una solución de $(y')^4 + y^2 = -1$.

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación diferencial debe ser no negativo para cada función real $y(x)$ y cualquier x, puesto que es la suma de términos elevados a la segunda y cuarta potencias, en tanto que el lado derecho de la ecuación es negativo. Debido a que ninguna función $y(x)$ satisfará esta ecuación, la ecuación diferencial no tiene solución.

Vemos que algunas ecuaciones diferenciales tienen un número infinito de soluciones (ejemplo 1.4), mientras que otras ecuaciones diferenciales no tienen solución (ejemplo 1.5). También es posible que una ecuación diferencial tenga exactamente una solución. Considere $(y')^4 + y^2 = 0$, que por idénticas razones a las expresadas en el ejemplo 1.5 sólo tiene una solución $y \equiv 0$.

Una *solución particular* de una ecuación diferencial es cualquier solución única. La *solución general* de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las soluciones.

EJEMPLO 1.6. La solución general a la ecuación diferencial del ejemplo 1.4 se puede demostrar que es (véanse capítulos 8 y 9) $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$. Es decir, cada solución particular de la ecuación diferencial tiene ésta como forma general. Algunas soluciones particulares son: *a)* $y = 5 \operatorname{sen} 2x - 3 \cos 2x$ (con $c_1 = 5$ y $c_2 = -3$), *b)* $y = \operatorname{sen} 2x$ (con $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$) y *c)* $y \equiv 0$ (con $c_1 = c_2 = 0$).

La solución general de una ecuación diferencial no se puede expresar siempre por medio de una fórmula única. Como un ejemplo, considere la ecuación diferencial $y' + y^2 = 0$, que tiene dos soluciones particulares $y = 1/x$ y $y \equiv 0$.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE VALORES EN LA FRONTERA

Una ecuación diferencial acompañada de condiciones subsidiarias sobre la función desconocida y sus derivadas, todas dadas al mismo valor de la variable independiente, constituyen un *problema de valor inicial*. Las condiciones subsidiarias son *condiciones iniciales*. Si las condiciones subsidiarias se dan a más de un valor de la variable independiente, el problema es un *problema de valores en la frontera* y las condiciones son las *condiciones en la frontera*.

EJEMPLO 1.7. El problema $y'' + 2y' = e^x$; $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 2$ es un problema de valor inicial, porque las dos condiciones subsidiarias están ambas dadas en $x = \pi$. El problema $y'' + 2y' = e^x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ es un problema de valores en la frontera, porque las dos condiciones subsidiarias están dadas para los diferentes valores $x = 0$ y $x = 1$.

Una *solución* para un problema de valor inicial o bien de valores en la frontera es una función $y(x)$ que resuelve a la ecuación diferencial y además satisface a todas las condiciones subsidiarias.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. Determine el orden, la función desconocida y la variable independiente de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''' - 5xy' = e^x + 1$ *b)* $t\ddot{y} + t^2\dot{y} - (\operatorname{sen} t)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$

c) $s^2\dfrac{d^2t}{ds^2} + st\dfrac{dt}{ds} = s$ *d)* $5\left(\dfrac{d^4b}{dp^4}\right)^5 + 7\left(\dfrac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = p$

a) Tercer orden, porque la derivada de mayor orden es la tercera. La función desconocida es y; la variable independiente es x.

b) Segundo orden, porque la derivada de mayor orden es la segunda. La función desconocida es y; la variable independiente es t.

c) Segundo orden, porque la derivada de mayor orden es la segunda. La función desconocida es t; la variable independiente es s.

d) Cuarto orden, porque la derivada de mayor orden es la cuarta. Al elevar derivadas a varias potencias no se altera el número de derivadas implicadas. La función desconocida es b; la variable independiente es p.

1.2. Determine el orden, la función desconocida y la variable independiente de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y\dfrac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$ *b)* $y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = x^2 + 1$

c) $2\dddot{x} + 3\dot{x} - 5x = 0$ *d)* $17y^{(4)} - t^6y^{(2)} - 4.2y^5 = 3\cos t$

a) Segundo orden. La función desconocida es x; la variable independiente es y.

b) Primer orden, porque la derivada de mayor orden es la primera, aun cuando esté elevada a la segunda potencia. La función desconocida es x; la variable independiente es y.

c) Tercer orden. La función desconocida es x; la variable independiente es t.

d) Cuarto orden. La función desconocida es y; la variable independiente es t. Obsérvese la diferencia de notación entre la cuarta derivada $y^{(4)}$, con paréntesis, y la quinta potencia y^5, sin paréntesis.

1.3. Determine si $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ es una solución de $y'' + 2y' + y = 0$.

Derivando $y(x)$, se sigue que

$$y'(x) = -2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y''(x) = e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} + 2(-e^{-x} - xe^{-x}) + (2e^{-x} + xe^{-x}) = 0$$

Por lo tanto, $y(x)$ es una solución.

1.4. ¿Es $y(x) \equiv 1$ una solución de $y'' + 2y' + y = x$?

A partir de $y(x) \equiv 1$, tenemos que $y'(x) \equiv 0$ y $y''(x) \equiv 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = 0 + 2(0) + 1 = 1 \neq x$$

De este modo, $y(x) \equiv 1$ no es una solución.

1.5. Demuestre que $y = \ln x$ es una solución de $xy'' + y' = 0$ en $\mathcal{I} = (0, \infty)$ pero no es una solución en $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$.

En $(0, \infty)$ tenemos $y' = 1/x$ y $y'' = -1/x^2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$xy'' + y' = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = 0$$

De este modo, $y = \ln x$ es una solución en $(0, \infty)$.

Observe que $y = \ln x$ no podría ser una solución en $(-\infty, \infty)$, pues el logaritmo no está definido para los números negativos y para el cero.

1.6. Demuestre que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución de $y' + 2xy^2 = 0$ en $\mathcal{I} = (-1, 1)$ pero no en cualquier intervalo más grande que contenga a $\mathcal{I}$.

En $(-1, 1)$, $y = 1/(x^2 - 1)$ y su derivada $y' = -2x/(x^2 - 1)^2$ son funciones bien definidas. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, tenemos

$$y' + 2xy^2 = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} + 2x\left[\frac{1}{x^2-1}\right]^2 = 0$$

De este modo, $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución en $\mathcal{I} = (-1, 1)$.

Note, sin embargo, que $1/(x^2 - 1)$ no está definida en $x = \pm 1$, y por lo tanto no podría ser una solución en ningún intervalo que contenga cualquiera de estos dos puntos.

1.7. Determine si cualquiera de las funciones *a)* $y_1 = \text{sen } 2x$, *b)* $y_2(x) = x$ o *c)* $y_3(x) = \frac{1}{2}\text{ sen } 2x$ es una solución para el problema de valor inicial $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

a) $y_1(x)$ es una solución para la ecuación diferencial y satisface la primera condición inicial $y(0) = 0$. Sin embargo, $y_1(x)$ no satisface la segunda condición inicial ($y_1'(x) = 2 \cos 2x$; $y_1'(0) = 2 \cos 0 = 2 \neq 1$); de aquí que no sea una solución para el problema de valor inicial. *b)* $y_2(x)$ satisface ambas condiciones iniciales, pero no satisface la ecuación diferencial; por eso, $y_2(x)$ no es una solución. *c)* $y_3(x)$ satisface la ecuación diferencial y ambas condiciones iniciales; por lo tanto, es una solución para el problema de valor inicial.

1.8. Halle la solución para el problema de valor inicial $y' + y = 0$; $y(3) = 2$, si la solución general para la ecuación diferencial se sabe que es (véase capítulo 8) $y(x) = c_1e^{-x}$, donde c_1 es una constante arbitraria.

Puesto que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial para cada valor de c_1, buscamos el valor de c_1 que también satisfaga la condición inicial. Obsérvese que $y(3) = c_1e^{-3}$. Para satisfacer la condición inicial $y(3) = 2$, es suficiente escoger c_1, de modo que $c_1e^{-3} = 2$, es decir, escoger $c_1 = 2e^3$. Sustituyendo este valor por c_1 en $y(x)$, obtenemos $y(x) = 2e^3e^{-x} = 2e^{3-x}$ como la solución del problema de valor inicial.

1.9. Halle una solución para el problema de valor inicial $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, si se sabe que la solución general para la ecuación diferencial (véase capítulo 9) es $y(x) = c_1 \text{ sen } 2x + c_2 \cos 2x$.

Dado que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial para todos los valores de c_1 y c_2 (véase el ejemplo 1.4), buscamos aquellos valores de c_1 y c_2 que también satisfagan las condiciones iniciales. Note que $y(0) = c_1 \text{ sen } 0 + c_2 \cos 0 = c_2$. Para satisfacer la primera condición inicial, $y(0) = 0$, elegimos $c_2 = 0$. Además, $y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \text{ sen } 2x$; de este modo, $y'(0) = 2c_1 \cos 0 - 2c_2 \operatorname{sen} 0 = 2c_1$. Para satisfacer la segunda condición inicial, $y'(0) = 1$, escogemos $2c_1 = 1$, o $c_1 = \frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores de c_1 y c_2 en $y(x)$, obtenemos $y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ como la solución del problema de valor inicial.

1.10. Encuentre una solución para el problema de valores en la frontera $y'' + 4y = 0$; $y(\pi/8) = 0$, $y(\pi/6) = 1$, si la solución general para la ecuación diferencial es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$.

Observe que

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Para satisfacer la condición $y(\pi/8) = 0$, necesitamos

$$c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

Además,

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Para satisfacer la segunda condición, $y(\pi/6) = 1$, precisamos

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1 \qquad (2)$$

Resolviendo (*1*) y (*2*) simultáneamente, hallamos

$$c_1 = -c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

Sustituyendo estos valores en $y(x)$, obtenemos

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}-1}(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$$

como la solución al problema de valores en la frontera.

1.11. Encuentre una solución para el problema de valores en la frontera $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 2$, si se sabe que la solución general para la ecuación diferencial es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$.

Puesto que $y(0) = c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = c_2$, debemos escoger $c_2 = 1$ para satisfacer la condición $y(0) = 1$. Dado que $y(\pi/2) = c_1 \operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi = -c_2$, debemos elegir $c_2 = -2$ para satisfacer la segunda condición, $y(\pi/2) = 2$. Así, para satisfacer ambas condiciones en la frontera de forma simultánea, requerimos que c_2 sea igual a 1 y a -2, lo cual es imposible. Por lo tanto, no existe una solución para este problema.

1.12. Determine c_1 y c_2 de modo que $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + 1$ satisfaga las condiciones $y(\pi/8) = 0$ y $y'(\pi/8) = \sqrt{2}$.

Obsérvese que

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 1$$

Para satisfacer la condición $y(\pi/8) = 0$, necesitamos que $c_1(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + c_2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + 1 = 0$, o de manera equivalente,

$$c_1 + c_2 = -\sqrt{2} \qquad (1)$$