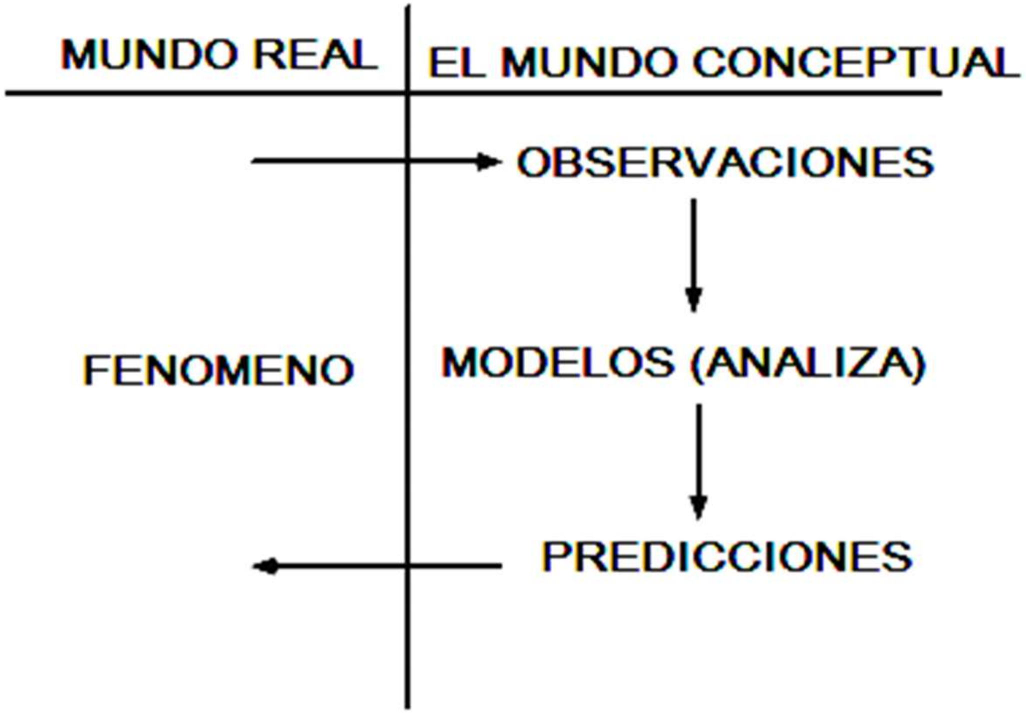
Aplicaciones de las EDO 1er Orden

MODELO :

- una representación en miniatura de algo;
- un patrón de algo por hacer; un ejemplo para imitación o emulación;
- una descripción o analogía utilizada para ayudar a visualizar algo (por ejemplo, un átomo) que no se puede observar directamente;
- Un sistema de postulados, datos e inferencias presentados como una descripción matemática de una entidad o estado de cosas

MODELO MATEMÁTICO :

una representación en términos matemáticos del comportamiento de dispositivos y objetos reales



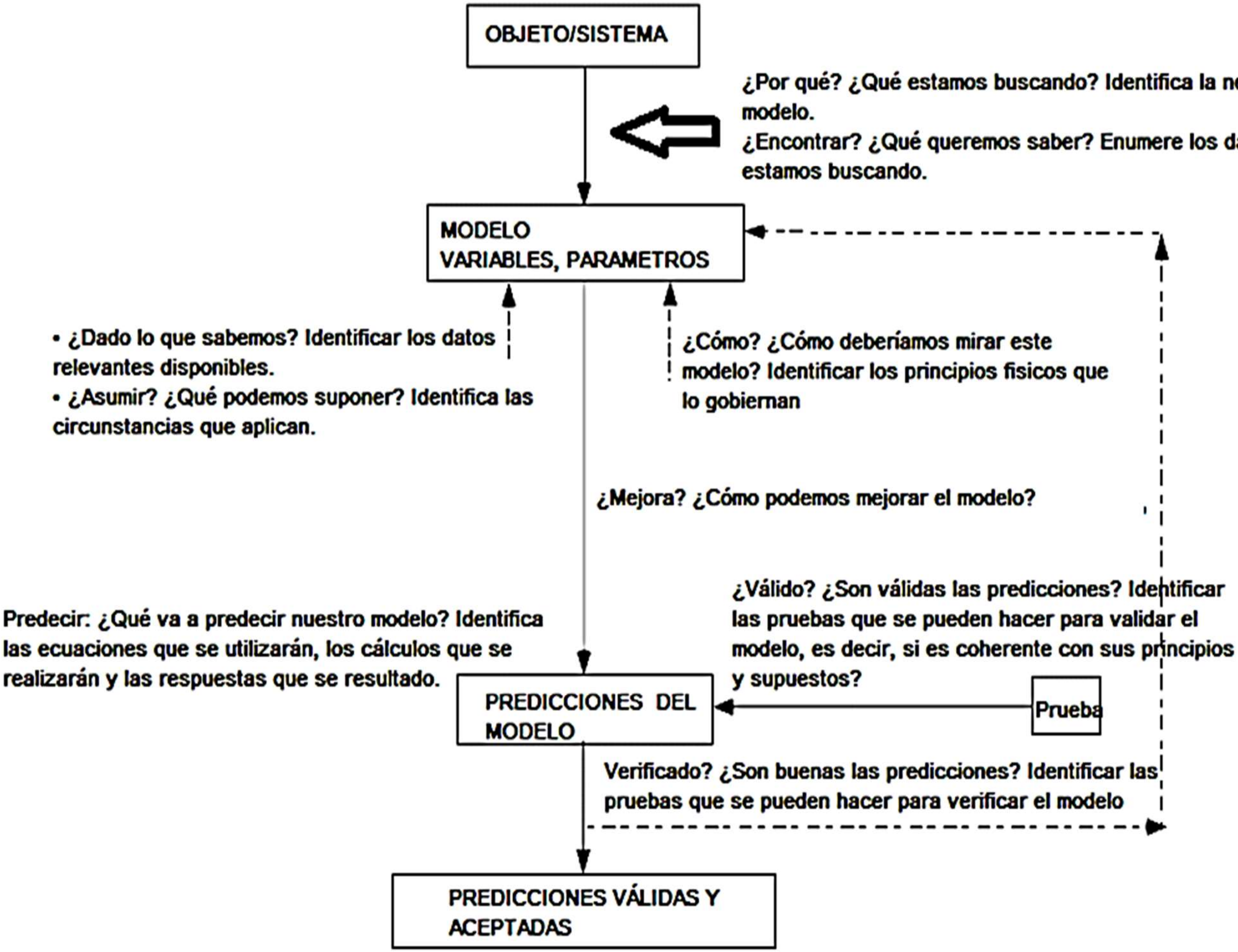
¿POR QUÉ ESTUDIAR MODELANDO?

El modelado puede evitar o reducir la necesidad de experimentos costosos, indeseables o imposibles con el mundo real.

<u>Para entender el concepto del modelado los siguientes problemas implican menos experimentación y mas predicción:</u>

<u>1) ¿Cuál es la forma más eficiente de dividir el combustible entre las etapas de un cohete de varias etapas?</u>
<u>2. ¿Cuál sería el efecto de un muy grave accidente en un reactor nuclear?</u>
<u>3. ¿Qué tan grande se necesitaba un meteorito para producir el Cráter Barringer en Arizona?</u>

PROCESO DEL MODELADO



TEMA	PRINCIPIO O LEY FISICA QUE LO RIGE	ECUACION DIFERENCIAL	APLICACIONES
MECANICA	LEYES DE MOVIMIENTO DE NEWTON	$F = \frac{dP}{dt}; P = mv$	CAIDA LIBRE TIRO VERTICAL CAIDA CON RESISTENCIA DEL AIRE
	LEY DE TORRICELLI	$\frac{dh}{dt} = -\frac{S_d}{S_o}\sqrt{2gh}$ $h \equiv$ altura de la columna $S \equiv$ áreas de seccion transversal de las columnas del deposito d, y o del orificio de salida $g \equiv$ aceleración de gravedad	DRENADO DE UN DEPOSITO
	CABLES COLGANTES	$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{W}{T}$ $y \equiv$ Altura respecto del punto de inflexión de la cuerda que esta en función de la deformacion que sufre la cuerda $x \equiv$ Longitud de la cuerda desde el punto de inflexion dela cuerda $W \equiv$ Peso de la cuerda $T \equiv$ Tensión tangencial a la cuerda debida a la deformacion sufrida	SECCIONES DE UN CABLE COLGADO
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO	LEY DE OHM	$V = IR; I = \frac{dQ}{dt}$ $Q \equiv$ Carga Electrica	CIRCUITOS RL, RC CON FEM CONSTANTE
	LEY DE CAIDA DE VOLTAJE EN UN CAPACITOR	$V_C = \frac{Q}{C}$	CIRCUITOS RL, RC CON FEM OSCILANTE
	LEY DE CAIDA DE VOLTAJE EN UN INDUCTOR LEYES DE KIRCHHOFF	$V_L = L\frac{dI}{dt}$ $L \equiv$ Inductancia de la bobina $\sum V_{Ganacia} = \sum V_{Perdida}$ en una malla $\sum I_{entrada} = \sum I_{Salida}$ en un nodo	CIRCUITO RL, RC CON FEM DECAYENTE
TERMODINAMICA	LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON	$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m); T \equiv$ Temperatura $T_m \equiv$ Temperatura Ambiente $K \equiv$ Parametro de enfriamiento	ENFRIAMIENTO DE UNA BARRA ENFRIAMIENTO DE UN CUERPO
QUIMICA	MEZCLAS	$\frac{dy}{dt} = f_e - f_s$ $\frac{dy}{dt} \equiv$ razon de cambio de la mezcla $y \equiv mezcla$ $f_e \equiv solucion$ de entrada $f_s \equiv solucion$ de salida	MEZCLAS DE SOLUCIONES EN DIVERSOS USOS, COMO PINTURAS, COMPONENTES QUIMICOS PARA PURIFICACION DE AGUA, OTROS
DIVERSOS	LEY DE DINAMICA POBLACIONAL	$\frac{dP}{dt} = -kP; P \equiv$ poblacion ó concentracion ó producción $k \equiv$ constante de proporcionalidad	CALCULO DE LA POBLACIONAL, O DE LA PRODUCCION DE UNA EMPRESA
BIOLOGIA	LEY DE DINAMICA DE UNA ENFERMEDAD	$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I$ $I \equiv$ numero de contagios $\beta \equiv$ taza de infección $S \equiv$ individuos susceptibles $\frac{1}{\gamma} \equiv$ $\mu \equiv$ taza promedio de defunciones	CALCULO DE CONTAGIOS DE UNA ENFERMEDAD, MODELO SIR (SUSCEPTIBLE, INFECTADOS Y RECUPERADOS)

ESTUDIO DE CASOS EN MODELADO

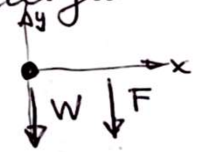
MECANICA

Mecanica

Un paracaidista cae desde un globo ubicado en la estratosfera hacia la tierra, durante un intervalo de tiempo $t_0 < t < t_1$ el paracaidista desciende en caida libre, al instante t_1 se abre el paracaidas cuando su velocidad es la velocidad limite, a partir de este punto durante un intervalo de tiempo $t_1 < t < t_f$ la resistencia del aire actua, hasta llegar al suelo.

Encontrar la función de velocidad del paracaidista en cualquier tiempo.

a) $t_0 < t < t_1$ el cuerpo cae en caida libre considerando que la velocidad inicial fue cero, entonces de acuerdo al diagrama de cuerpo libre del paracaidista se tiene



$$F = W$$

$$\frac{d}{dt} mv = mg$$, considerado la masa, m, del paracaidista no cambia entonces

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

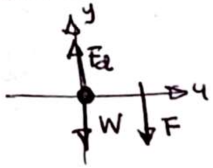
así que $\dfrac{dV}{dt} = g$, entonces

$$\int_0^{V_{lim}} dV = \int_{t_0}^{t} g\,dt$$

$$V\Big|_0^{V_{lim}} = g\Big|_{t_0}^{t} + C$$

$$V_{lim} = g(t-t_0) + C \qquad t_0 \le t < t_1$$

b) $t_1 \le t \le t_f$, considerando que este intervalo de tiempo, actua la resistencia del aire, entonces se presenta el fenomeno de arrastre del aire (fuerza de arrastre), la cuál es proporcional a la velocidad al cuadrado, y la constante de arrastre depende de la geometría del paracaidas, se considerara como b.



Así que de acuerdo al diagrama de cuerpo libre

$$F = F_d - W$$

$$\frac{d}{dt}(mV) = bV^2 - mg \quad , \text{ considerado } m \equiv \text{const}$$

$$m\frac{dV}{dt} = bV^2 - mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = bv^2 - mg$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b}{m}v^2 - g = Av^2 - g$$

$$\frac{dv}{dt} = Av^2 - g$$

$$\int_{v_{lim}}^{v}\frac{dv}{Av^2 - g} = \int_{t_1}^{t} dt \quad ; \quad K^2 = \frac{g}{A}$$

$$\frac{1}{A}\int_{v_{lim}}^{v}\frac{dv}{v^2 - K^2} = t - t_1$$

$$\frac{1}{v^2 - K^2} = \frac{1}{(v+K)(v-K)} = \frac{\alpha}{v+K} + \frac{\beta}{v-K} = \frac{\alpha(v-K) + \beta(v+K)}{v^2 - K^2}$$

$$= \frac{v(\alpha+\beta) + K(\beta-\alpha)}{v^2 - K^2}$$

$$\alpha + \beta = 0 \qquad K(\beta - \alpha) = 1$$

$$\beta = -\alpha \qquad K(2\beta) = 1$$

$$\alpha = -\frac{1}{2K} \qquad \beta = \frac{1}{2K}$$

$$\frac{1}{v^2 - K^2} = -\frac{1}{2K(v+K)} + \frac{1}{2K(v-K)} = \frac{1}{2K}\left[\frac{1}{v-K} - \frac{1}{v+K}\right]$$

$$\frac{1}{2KA}\left[\int_{V_{lim}}^{V}\frac{dV}{V-K}-\int_{V_{lim}}^{V}\frac{dV}{V+K}\right]=t-t_1$$

$$\frac{1}{2KA}\left[\ln(V-K)-\ln(V+K)\right]_{V_{lim}}^{V}=t-t_1$$

$$\ln\left|\frac{V-K}{V+K}\right|_{V_{lim}}^{V}=2KA(t-t_1)$$

$$\ln\left|\frac{V-K}{V+K}\right|-\ln\left|\frac{V_{lim}-K}{V_{lim}+K}\right|=2KA(t-t_1)$$

$$\ln\left|\frac{V-K}{V+K}\right|=2KA(t-t_1)+\ln\left|\frac{V_{lim}-K}{V_{lim}+K}\right|$$

aplicando la función exponcial

$$\frac{V-K}{V+K}=\left|\frac{V_{lim}-K}{V_{lim}+K}\right|e^{2KA(t-t_1)}$$

$$(V-K)(V_{lim}+K)=(V+K)(V_{lim}-K)\,e^{2KA(t-t_1)}$$

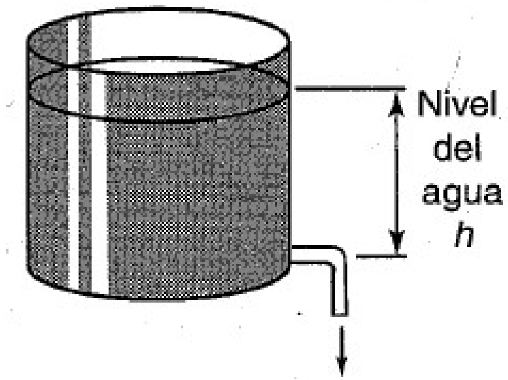
$$t_1\leq t\leq t_f$$

$$V(V_{lim}+K) - K(V_{lim}+K) = V(V_{lim}-K)\,e^{2KA(t-t_1)} + K(V_{lim}-K)\,e^{2KA(t-t_1)}$$

$$V\left[(V_{lim}+K) - (V_{lim}-K)\,e^{2KA(t-t_1)}\right] = K\left[(V_{lim}-K)\,e^{2KA(t-t_1)} + (V_{lim}+K)\right]$$

$$V = K\,\frac{\left[(V_{lim}-K)\,e^{2KA(t-t_1)} + (V_{lim}+K)\right]}{\left[(V_{lim}+K) - (V_{lim}-K)\,e^{2KA(t-t_1)}\right]}$$

- **DRENADO DE UN TANQUE**
- **LEY DE TORRICELLI**
-



Salida de agua

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

$$dh = k\sqrt{h}\,dt$$

$$\int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_{t_0}^t k\,dt$$

$$\int_H^h (h)^{-1/2}\,dh = k\left(t - t_0\right)$$

$$\left.\frac{h^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_H^h = k\left(t - t_0\right)$$

$$\left.2h^{\frac{1}{2}}\right|_H^h = k\left(t - t_0\right)$$

$$2\left(\sqrt{h} - \sqrt{H}\right) = k\left(t - t_0\right)$$

$$h = \left[\frac{k}{2}\left(t - t_0\right) + \sqrt{H}\right]^2$$

Ley del enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece el cambio de temperatura de un cuerpo en un intervalo de tiempo debido a la transferencia de calor a su medio circundante y dice que es proporcional a la de la temperatura en el cuerpo

$$\frac{dT}{dt} = -K(T-T_m), \text{ entonces}$$

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T-T_m} = -K\int_0^t t \Rightarrow \ln u \Big|_{T_0-T_m}^{T-T_m} = -Kt$$

$u = T-T_m$, $du = dT$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{T-T_m}{T_0-T_m}\right) = -kt \Rightarrow T-T_m = (T_0-T_m)e^{-kT}$$

$$\Rightarrow T = (T_0-T_m)e^{-kT} + T_m$$

$$\boxed{T = T_0 e^{-kt} + T_m(1-e^{-kt})}$$

Considere una barra metalica a una temperatura de 100 °F, la cual se coloca en un cuarto que se encuentra a una temperatura de 0 °F. Si despues de 20 minutos la tempera-tura de la barra es 50 °F, Hallar:

a) El tiempo que tardara la barra a 25 °F

Usando $\ln\left(\frac{T-T_m}{T_0-T_m}\right) = -Kt$

se calculara K, tomando, $T_m = 0°F$

$T = 50°F$ en $t = 20$ minutos, entonces

$$\ln\left(\frac{50}{100}\right) = -K(20) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -K20$$

$$-0.693 = -K20 \Rightarrow K = 0.034$$

así que

$$\boxed{T = 100e^{-0.034t}}$$

Si $T = 25°F$, usando

$$\ln\left(\frac{25}{100}\right) = -0.034t$$

$$-1.38 = -0.034t \Rightarrow t \simeq 41 \text{ minutos}$$

b) La temperatura de la barra después de 10 minutos

$$T = 100\, e^{-0.034(10)} = 100\, e^{-0.34} = 100(0.7117)$$

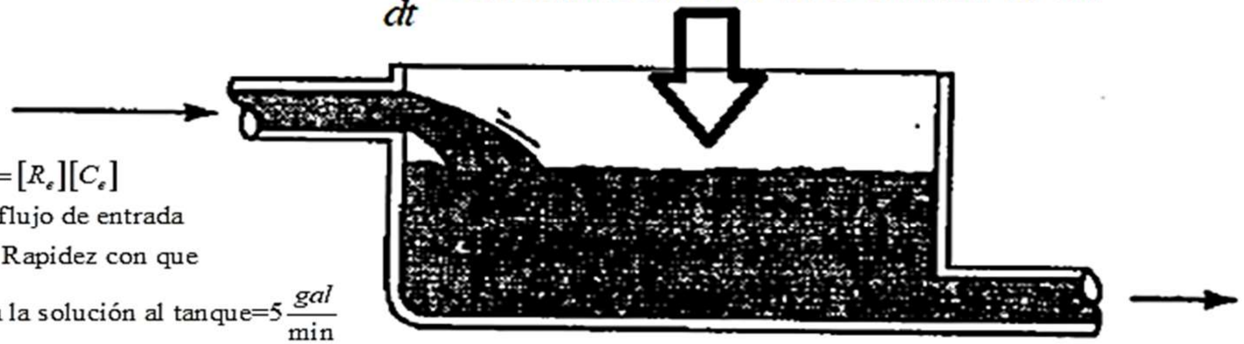
$$T = 71.2\ °F$$

Problema de mezcla

El tanque de la figura contiene 200 galones de agua en los que están disueltas 40 lb de sal. Al tanque entran 5 galones de salmuera por minuto, cada uno de los cuales contiene 2 lb de sal disuelta, y la mezcla, cuya uniformidad se mantiene agitándola, sale a la misma razón. Encontrar la cantidad de sal $y(t)$ que hay en el tanque en cualquier tiempo t.

$y \equiv$ cantidad de sal en el tanque en el tiempo t

$\frac{dy}{dt} \equiv$ Razón de cambio de la cantida de sal



$[f_e]=[R_e][C_e]$

$f_e \equiv$ flujo de entrada

$R_e \equiv$ Rapidez con que entra la solución al tanque$=5\,\frac{gal}{\min}$

$C_e \equiv$ Concetración de sal en la solución que entra$=2\,\frac{lb}{gal}$

$$f_e=\left(5\,\frac{gal}{\min}\right)\left(2\,\frac{lb}{gal}\right)=10\,\frac{lb}{\min}$$

$[f_s]=[R_s][C_s]$

$f_s \equiv$ flujo de salida

$R_s \equiv$ Rapidez con que sale la solución al tanque$=5\,\frac{gal}{\min}$

$C_s \equiv$ Concetración de sal en la solución que sale$=$y $\frac{lb}{200\,gal}$

$$f_e=\left(5\,\frac{gal}{\min}\right)\left(y\,\frac{lb}{200\,gal}\right)=\frac{5}{200}\,y\,\frac{lb}{\min}$$

$$y' = 10 - \left(\frac{5}{200}\right)y$$

$$y(0) = 40$$

$$\left[f_e\right]=\left[R_e\right]\left[C_e\right]$$

$f_e \equiv$ flujo de entrada

$R_e \equiv$ Rapidez con que

entra la solución al tanque=$5\dfrac{gal}{\min}$

$C_e \equiv$ Concetración de sal en

la solución que entra=$2\dfrac{lb}{gal}$

$$f_e=\left(5\frac{gal}{\min}\right)\left(2\frac{lb}{gal}\right)=10\frac{lb}{\min}$$

$$\left[f_s\right]=\left[R_s\right]\left[C_s\right]$$

$f_s \equiv$ flujo de salida

$R_s \equiv$ Rapidez con que

sale la solución al tanque=$5\dfrac{gal}{\min}$

$C_s \equiv$ Concetración de sal en

la solución que sale=y$\dfrac{lb}{200gal}$

$$f_e=\left(5\frac{gal}{\min}\right)\left(y\frac{lb}{200gal}\right)=\frac{5}{200}y\frac{lb}{\min}$$

$$y' = 10 - \left(\frac{5}{200}\right) y$$
$$y(0) = 40$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f_{e_{sal}} - f_{s_{sal}}$$

$$\dot{y} = 10 \frac{lb}{min} - \frac{5}{200} y \frac{lb}{min}$$

$$\dot{y} = 10 - \frac{5}{200} y$$

$$dy = \left(10 - \frac{5}{200} y\right) dt$$

$$\left(10 - \frac{5}{200} y\right) dt - dy = 0$$

$$F_t \left(10 - \frac{5}{200} y\right) dt - F_t\, dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$-\frac{5}{200} F_t = -\frac{dF_t}{dt} \Rightarrow \int \frac{dF_t}{F_t} = \frac{5}{200} \int dt$$

$$\Rightarrow \ln F_t = \frac{5}{200} t \Rightarrow F_t = e^{5t/200}$$

$$e^{5t/200}\left(10 - \frac{5}{200} y\right) dt - e^{5t/200} dy = 0$$

$$U_{aprox} = \int e^{5t/200}\left(10 - \frac{5}{200} y\right) dt + K_y$$

$$= 10 \int e^{\frac{5}{200} t} dt - \frac{5}{200} y \int e^{\frac{5t}{200}} dt + K_y$$

$$U_{aprox} = 10 \, \frac{200}{5} e^{\frac{5}{200} t} - y\, e^{\frac{5t}{200}} + K_y$$

$$\frac{\partial U_{aprox}}{\partial y} = N$$

$$-e^{\frac{5t}{200}} + \frac{dK_y}{dy} = -e^{\frac{5t}{200}} \Rightarrow K_y = \text{const}$$

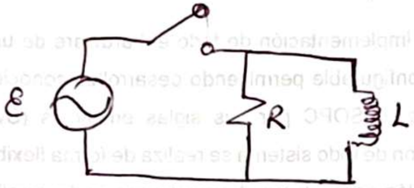
$$\therefore \frac{2000}{5} e^{\frac{5}{200} t} - y\, e^{\frac{5t}{200}} = \text{const}$$

$$400\, e^{\frac{5t}{200}} - y\, e^{\frac{5t}{200}} = \text{const}$$

$$y = 40;\ t = 0 \Rightarrow 400 e^{0} - 40 e^{0} = \text{const}$$

$$360 = c$$

$$\therefore \boxed{e^{\frac{5t}{200}}(400 - y) = 360}$$



$$\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{\varepsilon}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} - \frac{R}{L}i = \frac{1}{L}(\varepsilon - Ri)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \operatorname{sen}\omega t - Ri}{L}$$

$$(\varepsilon_0 \operatorname{sen}\omega t - Ri)dt - L\,di = 0$$

$$\underbrace{F_t(\varepsilon_0 \operatorname{sen}\omega t - Ri)dt}_{M} \underbrace{- L F_t}_{N} di = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial i} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$-RF_t = -L\frac{dF_t}{dt} \Rightarrow \int \frac{dF_t}{F_t} = \int \frac{R}{L}dt$$

$$\ln F_t = \frac{R}{L}t \Rightarrow F_t = e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\underbrace{e^{\frac{R}{L}t}(\varepsilon_0 \operatorname{sen}\omega t - Ri)dt}_{P} \underbrace{- L e^{\frac{R}{L}t}}_{Q} di = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial i} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$-Re^{\frac{R}{L}t} = -Le^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{R}{L}t\right)'$$

$$-Re^{\frac{R}{L}t} = -Re^{\frac{R}{L}t} \quad \text{Exacta}$$

$$u_{aprox} = \int Q\, di + l(t)$$

$$u_{aprox} = \int \left(-Le^{\frac{R}{L}t}\right) di + l(t) = -Le^{\frac{R}{L}t} i + l(t)$$

$$\frac{\partial u_{aprox}}{\partial t} = P \quad ; \quad \frac{\partial u_{aprox}}{\partial t} = -Re^{\frac{R}{L}t} i + \frac{dl}{dt}$$

entonces

$$e^{\frac{R}{L}t} \varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t \cancel{- Re^{\frac{R}{L}t} i} = \cancel{-Re^{\frac{R}{L}t}} i + \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \varepsilon_0 e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t$$

$$l = \varepsilon_0 \int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\, dt$$

$$\ell = \varepsilon_0 \int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\,dt$$

$$f = e^{\frac{R}{L}t} \qquad dg = \operatorname{sen} \omega t\,dt$$

$$df = \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt \qquad g = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t$$

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\,dt = -\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{L\omega} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t\,dt$$

$$f = e^{\frac{R}{L}t} \qquad dg = \cos \omega t\,dt$$

$$df = \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt \qquad g = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

$$= -\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t - \frac{R}{L\omega} \int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\,dt$$

$$1 + \frac{R}{L\omega} = \frac{L\omega + R}{L\omega}$$

$$\left(1 + \frac{R}{L\omega}\right) \int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\,dt = \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\omega} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t)$$

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\,dt = \frac{L}{L\omega + R} e^{\frac{R}{L}t} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t)$$

por lo que

$$\ell = \frac{L \varepsilon_0}{L\omega + R} e^{\frac{R}{L}t} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t)$$

por lo tanto

$$u = -L e^{\frac{R}{L}t} \dot{i} + \frac{L \varepsilon_0}{L\omega + R} e^{\frac{R}{L}t} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t)$$

con $u =$ constante, entonces

$$\frac{L \varepsilon_0}{L\omega + R} e^{\frac{R}{L}t} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t) - L e^{\frac{R}{L}t} \dot{i} = \text{constante}$$

$$\dot{i} = \frac{\frac{L \varepsilon_0}{L\omega + R} e^{\frac{R}{L}t} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t) - \text{constante}}{L e^{\frac{R}{L}t}}$$

$$\dot{i} = \frac{L \varepsilon_0}{L\omega + R} (\operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t) - \frac{K}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Decaimiento Radiactivo

$$\frac{dP}{dt} = -KP$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -K\int_0^t dt \Rightarrow \ln P \Big|_{P_0}^{P} = -Kt$$

$$\ln P - \ln P_0 = -Kt$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = -Kt$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-Kt} \Rightarrow P = P_0 e^{-Kt}$$

La vida-media o periodo de semidesintegración, $t = t_{1/2} \Rightarrow P = \frac{P_0}{2}$

$$\frac{P_0}{2} = P_0 e^{-Kt_{1/2}} \Rightarrow e^{-Kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$-K t_{1/2} = \ln 1/2 \Rightarrow K = -\frac{\ln 1/2}{t_{1/2}}$$

$$P = P_0 e^{(\ln 1/2)\, t/t_{1/2}}$$

Cierto material radioactivo se desintegra a una taza proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 50 mili-gramos de material presente y despues de dos horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original, hallar a) la masa de material despues de cuatro horas

N: Cantidad de masa

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -k\int_{0}^{t} dt$$

$$\ln N \Big|_{N_0}^{N} = -kt$$

$$\ln N - \ln N_0 = -kt$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -kt \Rightarrow \boxed{N = N_0 e^{-kt}}$$

a $t = 2\,Hrs \Rightarrow N = 50 - (50)(0.10)$

$$N = 50 - 5 = 45$$

Usando $\ln \frac{45}{50} = -k(2\,Hrs)$

$$-0.105 = -k2 \Rightarrow k \approx 0.053$$

así que

$$N = 50e^{-0.053t}$$

por lo que

$$N = 50e^{-0.053(4)}$$

$$N = 40.45\,gr$$

b) El tiempo al cabo del cual el material se ha desintegrado ala mitad de su masa inicial

$N = 25$, usando

$$\ln \frac{25}{50} = -0.053t_{1/2}$$

$$-0.693 = -0.053\,t_{1/2}$$

$$t_{1/2} \approx 13\,Hrs$$

Ecuaciones diferenciales Lineales

- Tiene la forma $y' + p(x)\,y = r(x)$

- si r(x)=0 se dice HOMOGÉNEA; se resuelve por integración directa

- <u>si r(x)≠0 se dice No Homogénea; se resuelve por factor integrante.</u>

EDO 1ER ORDEN
Tipo Lineales
CASO: Ecuación de Bernoulli

- ***Tiene la forma*** $$y' + p(x)y = r(x)$$
- ***si r(x)≠0*** $$r(x) = g(x)y^a$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' + p(x)y = g(x)y^a}$$

- ***se resuelve por factor integrante.***

$$\boxed{\left(p(x)y - g(x)y^a\right)dx + dy = 0}$$

El modelo de crecimiento de la población de Verhulst

La ecuación fue propuesta por Verhulst para modelar el crecimiento de cualquier población, ya sea humana o de animales. Es una ecuación paradigmática porque a pesar de su sencillez es una ecuación dinámica no lineal con mucho potencial para modelar y además es muy didáctica para representar un sistema dinámico no lineal que evoluciona en el tiempo.

Sean:

t = Tiempo (variable independiente).

P = Población (variable dependiente).

γ= Coeficiente de la razón de crecimiento de la población (parámetro).

K = Capacidad de carga del sistema.

Entonces,

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

El modelo de crecimiento de la población de Verhulst; caso especial de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dP}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

$$\frac{dP}{dt} = \gamma P - \gamma\frac{P^2}{K}$$

$$P' - \gamma P = -\frac{\gamma}{K}P^2$$

$$P' - \gamma P = -\frac{\gamma}{K}P^2$$

$$P' - AP = -BP^2$$

Ecuación de Bernoulli

$$y' + p(x)y = g(x)y^a$$

$$y' = g(x)y^a - p(x)y$$

$$u = y^{1-a}$$

Modelo Poblacional

$$\frac{dP}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{P}{K}\right)P \qquad y' + Py = g\,y^a$$

$$u = y^{1-a}$$

$$P' = \gamma\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

$$P' = \left(\gamma - \frac{\gamma}{K}P\right)P$$

$$P' = \gamma P - \frac{\gamma}{K}P^2$$

$$a = 2$$

$$P' - \gamma P = \frac{\gamma}{K}P^2 \qquad u = P^{-1}$$

$$-P^2u' - \gamma P = \frac{\gamma}{K}P^2 \qquad u' = -P^{-2}P'$$

$$P' = -P^2u'$$

$$u' + \gamma P^{-1} = -\frac{\gamma}{K}$$

$$u' + \gamma u = -\frac{\gamma}{K}$$

$$u' + \frac{\gamma}{K} + \gamma u = 0$$

$$du + \left(\frac{\gamma}{K} + \gamma u\right) dt = 0$$

$$\left(\frac{\gamma}{K} + \gamma u\right) dt + du = 0$$

$$F_t \left(\frac{\gamma}{K} + \gamma u\right) dt + F_t \, du = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial t} \Longrightarrow \gamma F_t = \frac{dF_t}{dt}$$

$$\int \frac{dF_t}{F_t} = \frac{1}{\gamma}\int dt \Rightarrow \ln F_t = \frac{t}{\gamma}$$

$$\Longrightarrow F_t = e^{t/\gamma}$$

$$e^{t/\gamma}\left(\frac{\gamma}{K} + \gamma u\right) dt + e^{t/\gamma} du = 0$$

$$u_{aprox} = \int e^{t/\gamma}\left(\frac{\gamma}{K} + \gamma u\right) dt + K_u$$

$$u_{aprox} = \frac{\gamma}{K}\int e^{t/\gamma} dt + \gamma u \int e^{t/\gamma} dt + K_u$$

$$u_{aprox} = \frac{\gamma^2}{K} e^{t/\gamma} + \gamma^2 u \, e^{t/\gamma} + K_u$$

$$\frac{\partial u_{aprox}}{\partial u} = N$$

$$\gamma^2 e^{t/\gamma} + \frac{dK_u}{du} = e^{t/\gamma}$$

$$\frac{dK_u}{du} = e^{t/\gamma}(1-\gamma^2)$$

$$K_u = e^{t/\gamma}(1-\gamma^2)\, u$$

entonces

$$u = \frac{\gamma^2}{K} e^{t/\gamma} + \gamma^2 e^{t/\gamma} u + e^{t/\gamma}(1-\gamma^2)\, u$$

pero $u = \text{constante}$

$$\frac{\gamma^2}{k} e^{t/\gamma} + \cancel{\gamma^2 e^{t/\gamma}} u + e^{t/\gamma} u - \cancel{\gamma^2 e^{t/\gamma}} u = c$$

$$\boxed{\frac{\gamma^2}{k} e^{t/\gamma} + e^{t/\gamma} u = c}$$

$$\frac{\gamma^2}{k} e^{t/\gamma} + \frac{e^{t/\gamma}}{p} = c$$

Utilizando un modelo logístico con capacidad sustentable K=100x 10^9, una población mundial (humana) de 5x10^9 en 1986 y una razón de crecimiento γ de 2 % anual, hacer una predicción de la población mundial para el año 2030.
Los datos provistos son aproximaciones de los datos observados en la realidad

$K = 100 \times 10^9$ $\quad\quad$ $1986 \rightarrow 5 \times 10^9$

$\gamma = 0.02$ $\quad\quad$ 2030

$$P' = 0.02\left(1 - \frac{P}{100}\right)P$$

Trabajar en unidades de 10^9

$$P' = 0.02P - \frac{0.02}{100}P^2$$

$$P' - 0.02P = -\frac{0.02}{100}P^2$$

$a = 2 \quad v = P^{-1} \Rightarrow v' = -P^{-2}P' \Rightarrow P' = -P^2 v'$

$$-P^2 v' - 0.02P = -\frac{0.02}{100}P^2$$

$$v' + 0.02P^{-1} = -\frac{0.02}{100}$$

$$v' + 0.02v = \frac{-0.02}{100}$$

$$v' = -\frac{0.02}{100}(1 + 100v)$$

$$\boxed{\frac{0.02}{100}(1 + 100v)dt + dv = 0}$$

$$F_t \frac{0.02}{100}(1+100v)\,dt + F_t\,dv = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$0.02F_t = \frac{dF_t}{dt} \Rightarrow \int\frac{dF_t}{F_t} = 0.02\int dt$$

$$\ln F_t = 0.02t \Rightarrow \boxed{F_t = e^{0.02t}}$$

entonces

$$e^{0.02t}\frac{0.02}{100}(1+100v)\,dt + e^{0.02t}\,dv = 0$$

$$M_{apox} = \int e^{0.02t}\frac{0.02}{100}(1+100v)\,dt + K_v$$

$$= \frac{0.02}{100}(1+100v)\int e^{0.02t}\,dt + K_v$$

$$\boxed{M_{apox} = \frac{1+100v}{100}e^{0.02t} + K_v}$$

$$M_{apox} = \frac{1+100v}{100}e^{0.02t} + K_v$$

$$\frac{\partial M_{apox}}{\partial v} = N$$

$$e^{0.02t} + \frac{dK_v}{dv} = e^{0.02t} \Rightarrow K_v = const$$

y tomando $M = constante$

$$\frac{1+100v}{100}e^{0.02t} = constante$$

$$\boxed{\frac{1+100P^{-1}}{100}e^{0.02t} = C}$$

$t=0 \longleftrightarrow 1986 \Rightarrow P=5$

$$\frac{1+\frac{100}{5}}{100}e^{0} = C \Rightarrow C = \frac{\frac{105}{5}}{100}$$

$$C = \frac{105}{500} \Rightarrow \boxed{\frac{1+100P^{-1}}{100}e^{0.02t} = \frac{105}{500}}$$

$$\frac{1+\frac{100}{P}}{100}\, e^{0.02t} = \frac{105}{500}$$

$$t = 2030 - 1986 = 44$$

$$t = 44$$

$$\frac{1+\frac{100}{P}}{100}\, e^{(0.02)(44)} = \frac{105}{500}$$

$$\left(1+\frac{100}{P}\right) e^{0.88} = \frac{10500}{500} = 21$$

$$\left(1+\frac{100}{P}\right) 2.411 = 21$$

$$1+\frac{100}{P} = \frac{21}{2.411} = 8.7101$$

$$\frac{100}{P} = 7.7101$$

$$P = \frac{100}{7.7101} = 12.97 \Rightarrow P \sim 13 \times 10^{9} \text{ Hab}$$

8.600 millones

La población mundial actual de **7.600 millones** de personas alcanzarán los 8.600 millones para el año 2030. Además, llegará a 9.800 millones para 2050 y a 11.200 para 2100. Estas son estimaciones de un nuevo informe de Naciones Unidas, dado a conocer este miércoles. 21 jun. 2017

www.un.org › news › population › world-population-prospects-2017

La población mundial aumentará en 1.000 millon

$P \sim 13000$ millones de Hab