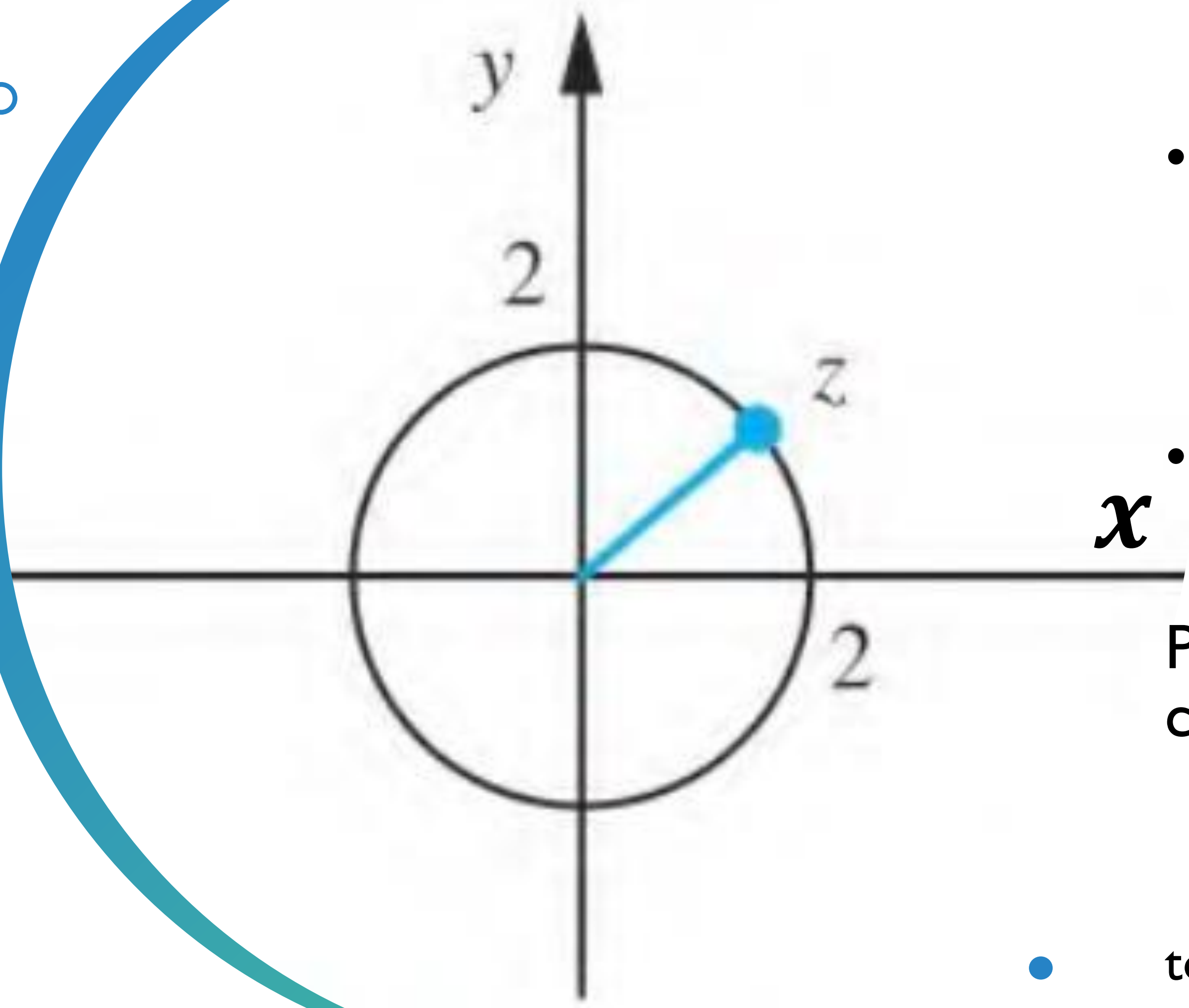
LUGAR GEOMÉTRICO Y REGIONES DEL PLANO COMPLEJO

Dr. José Federico Ramírez Cruz



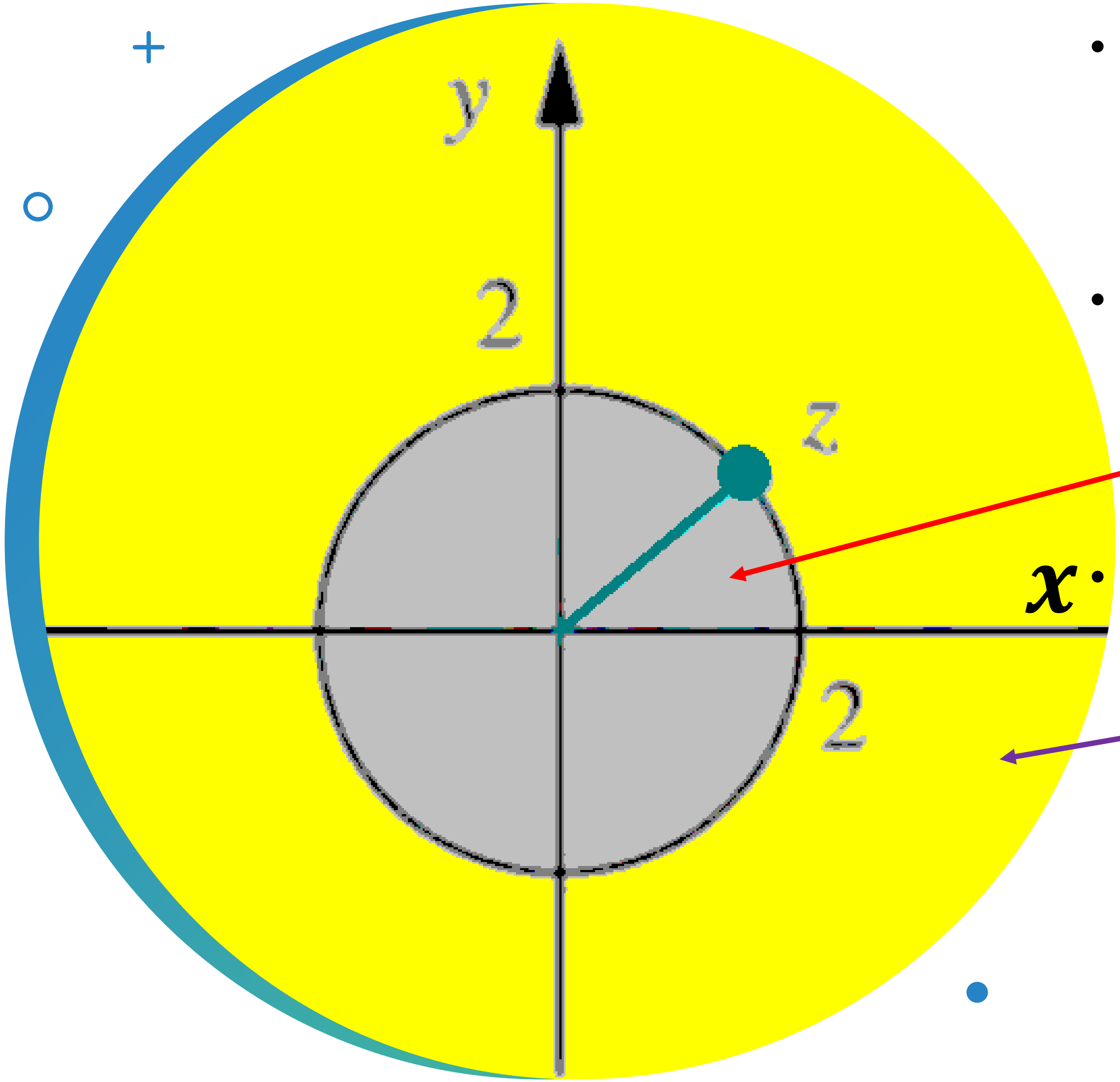
- Las regiones del plano complejo a menudo se pueden describir convenientemente mediante números complejos.
- Por ejemplo, los puntos que se encuentran en una circunferencia de radio 2 centrada en el origen representan números complejos, todos los cuales tienen un módulo de 2.
- Los argumentos son cualquier valor de

$$-\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Podemos describir todos los puntos de este círculo mediante la expresión simple:

$$|z| = 2$$

- todos los números complejos con módulo 2.



- Decimos que el **lugar geométrico (o trayectoria)** del punto z es una circunferencia de radio 2, centrado en el origen.

- El interior del círculo se describe mediante

$$|z| < 2$$

- Mientras que su exterior se describe mediante

$$|z| > 2$$

Ejemplo: Dibuje el lugar geométrico del punto que satisfaga $|z - 2| = 3.$

Solución:

Dado que z es un número complejo $z = x + yi$ y que las barras representan el módulo o magnitud, entonces:

$|z-2| = 3$ equivale a $|(x+yi) - 2| = 3$, entonces $|(x-2)+yi| = 3$

Y el módulo de dicho número complejo resultante es

$$|(x-2)+yi| = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

Entonces:

$|(x-2)+yi| = 3$ sería $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3$ o $(x-2)^2+y^2 = 3^2$

$$(x-2)^2+y^2 = 9$$

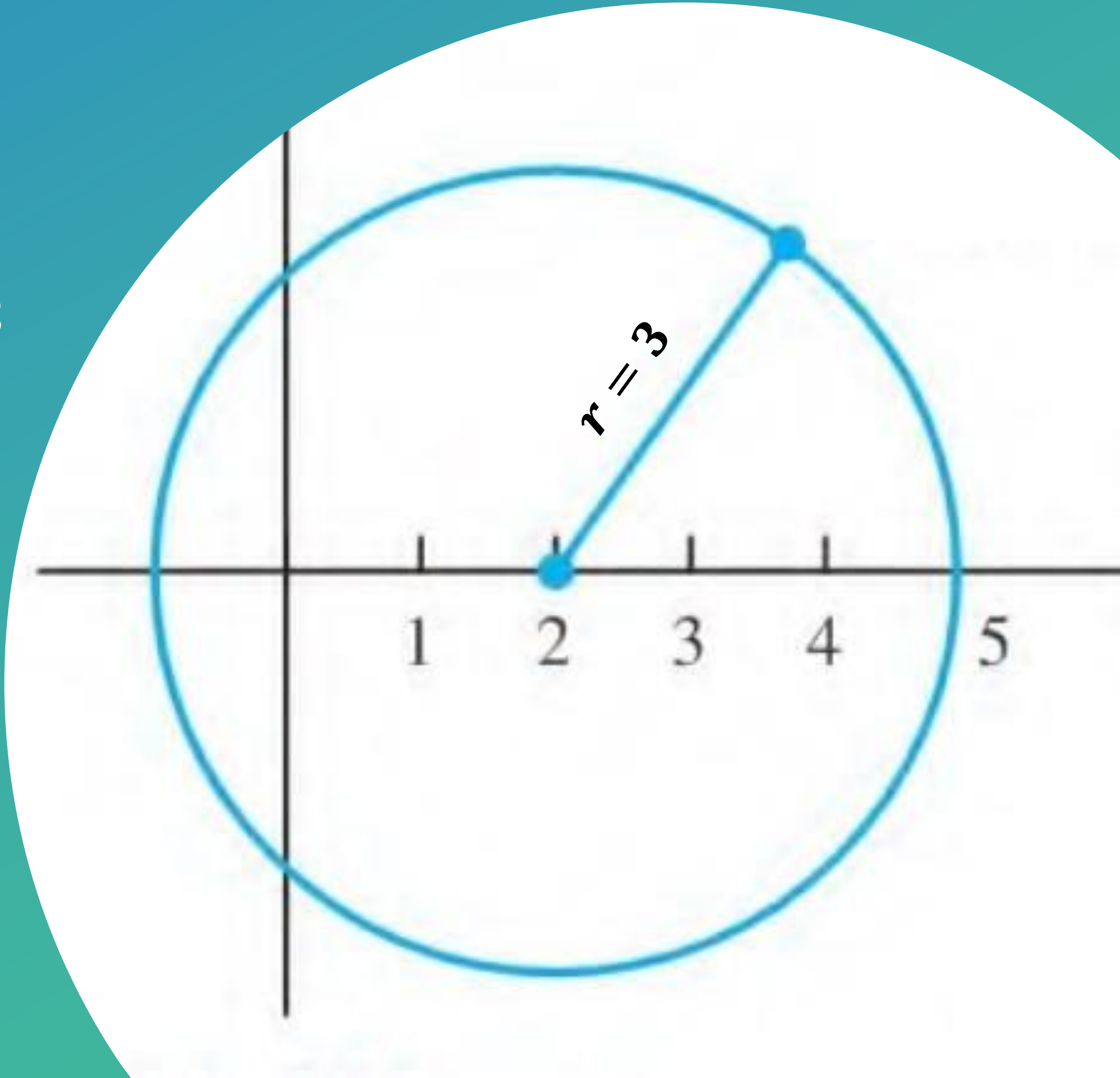
Generalmente, la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

representa una circunferencia de radio r centrada en (h, k), entonces vemos que

$$(x-2)^2+y^2 = 9$$

representa un círculo de radio 3 centrado en (2, 0), como antes



Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga

$$|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$$

Solución:

$$|x+yi-1| = \frac{1}{2}|x+yi-i|$$

$$|(x-1)+yi| = \frac{1}{2}|x+i(y-1)|$$

Sustituyendo en al ecuación del módulo

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados, tenemos

$$(x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 [x^2 + (y-1)^2]$$

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}[x^2 + (y-1)^2]$$

$$4(x-1)^2 + 4y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$

$$4(x-1)^2 + 4y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 4y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$\boxed{4x^2} - 8x \boxed{+4} + 4y^2 \boxed{-x^2} - y^2 + 2y \boxed{-1} = 0$$

$$3x^2 - 8x + 3y^2 + 2y + 3 = 0$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1|=\frac{1}{2}|z-i|$

$$\boxed{3x^2-8x}+\boxed{3y^2+2y}+3=0$$

Completando trinomios

$$\boxed{3x^2-8x}=3\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)$$

Entonces, siguiendo la operación de un binomio al cuadrado:

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

Tenemos que

$$2a=\frac{8}{3} \quad donde \quad a=\frac{4}{3}$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Tenemos que

$$2a = \frac{8}{3} \quad donde \quad a = \frac{4}{3}$$

Sustituyendo

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$

$$3y^2 + 2y$$

Completando trinomios

$$3y^2 + 2y = 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y\right)$$

Entonces, siguiendo la operación de un binomio al cuadrado:

$$(y+a)^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

Tenemos que

$$2a = \frac{2}{3} \quad donde \quad a = \frac{1}{3}$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$

$$(y+a)^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

Tenemos que

$$2a = \frac{2}{3} \quad donde \quad a = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo

$$\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$

Entonces

$$3\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}\right) + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) + 3$$

$$\boxed{3x^2 - 8x} \boxed{+\frac{16}{3}} + \boxed{3y^2 + 2y} \boxed{+\frac{1}{3}} + 3 = 0$$

Tenemos

$$3x^2 - 8x + \frac{16}{3} + 3y^2 + 2y + \frac{1}{3} + 3 = \frac{17}{3}$$

$$3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{17}{3} - 3$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$

Entonces

$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{17}{3} - 3$$

$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{17}{3} - \frac{9}{3}$$

$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1|=\frac{1}{2}|z-i|$

dividiendo ambos lados por 3, tenemos

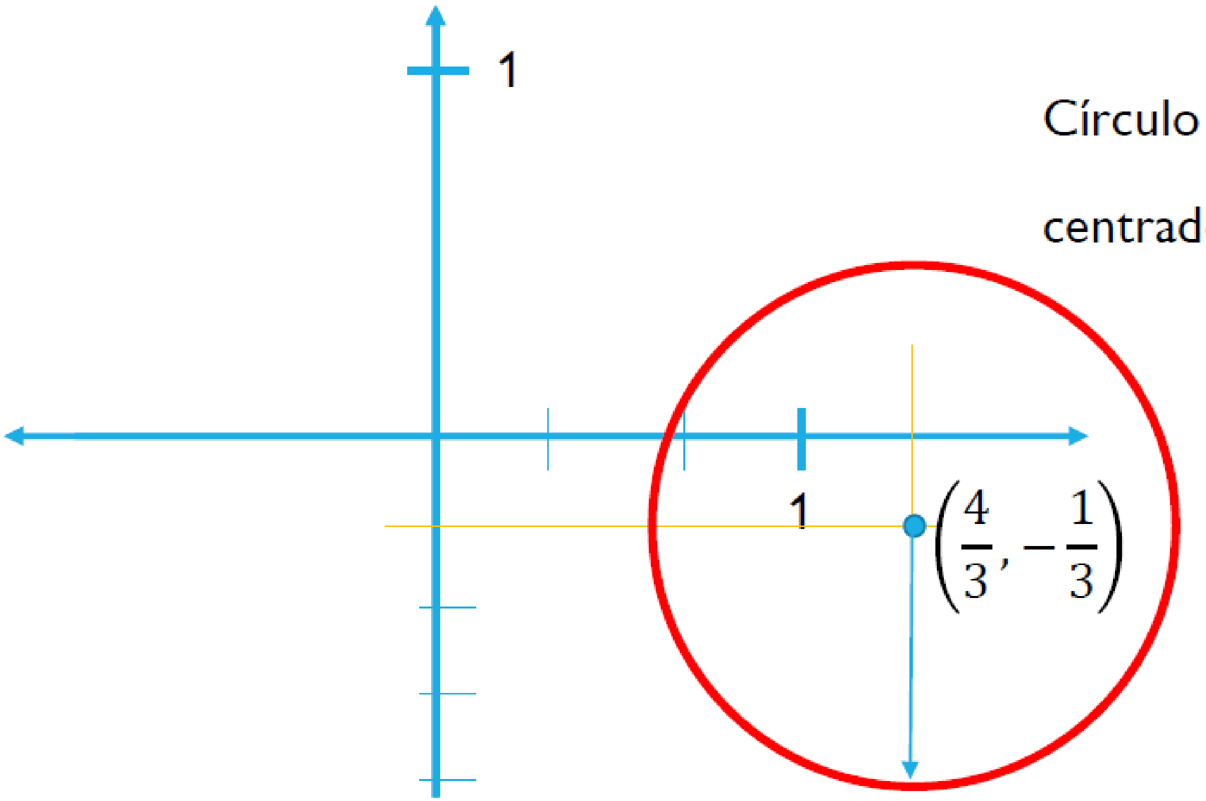
$$\boxed{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}}$$

La ecuación de una circunferencia es: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Esta expresión representa a una circunferencia de radio $\mathrm{r}=\sqrt{\frac{8}{9}}$

y con centro en $\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Ejercicio: Encuentre el lugar geométrico del punto z que satisfaga $|z-1| = \frac{1}{2}|z-i|$



Círculo de radio $\sqrt{\frac{8}{9}}$ y centrado el punto $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$