Formula Integral de Cauchy

Dr. José Federico Ramírez Cruz

Condiciones para que una función f sea Analítica

$$f \text{ es analítica} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ continua} \Rightarrow \begin{matrix} u(x;y) \text{ continua} \\ v(x;y) \text{ continua} \end{matrix} \\ f \text{ derivable} \Rightarrow f \text{ verifica C-R} \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \end{cases}$$

y que f' es continua $\Rightarrow$ u'_x, u'_y, v'_x y v'_y continuas.

Una función en el plano complejo

- *Una función en el plano complejo*

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

- $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones de dos variable x, y
- $u(x, y)$ es la parte real de la función f
- $v(x, y)i$ es la parte imaginaria de la función f

Obtenga la función $f(z) = z^2$

Sea $f \;= z^2$

$$z = x + iy$$
$$z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 + ixy + ixy + (iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

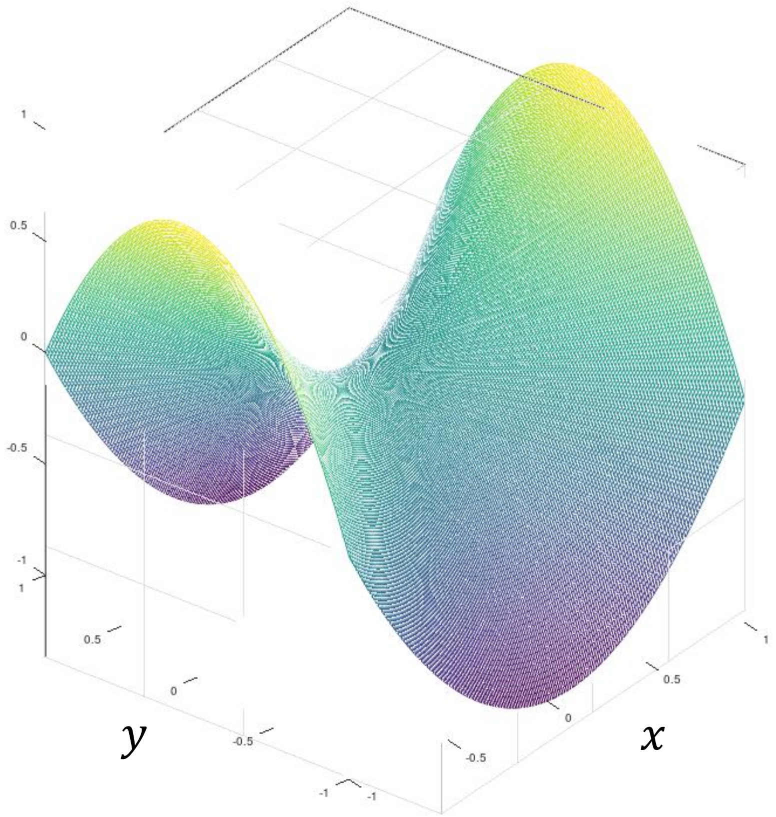
- $f = u(x, y) + iv(x, y)$

$$f = z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

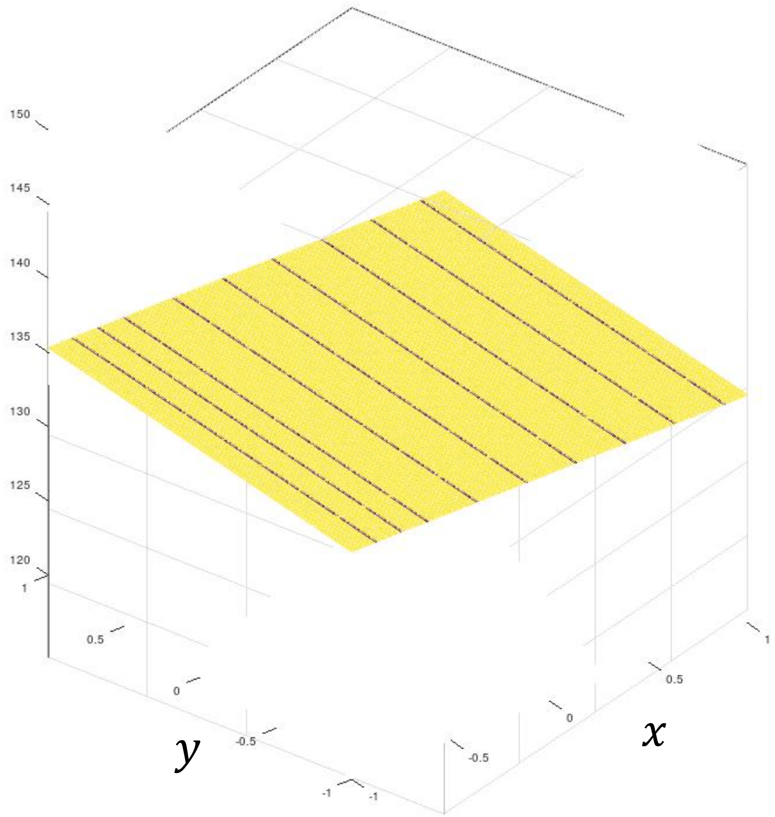
$$u(x, y) = (x^2 - y^2)$$
$$v(x, y) = 2xy$$

$$f = u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 - y^2) + i2xy$$

Las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son contínuas



$u(x, y) = (x^2 - y^2)$



$v(x, y) = 2xy$

Comprobar las condiciones de Cauchy-Riemann

Condición 1 **Condición 2**

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \quad . \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial x} = 2x - 0 = \boxed{2x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = \boxed{2x}$$

Comprobar las condiciones de Cauchy-Riemann

Condición 1 **Condición 2**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad . \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial y} = 0 - 2y = \boxed{-2y}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial (2xy)}{\partial x} = \boxed{-2y}$$

Teorema de Cauchy-Goursat

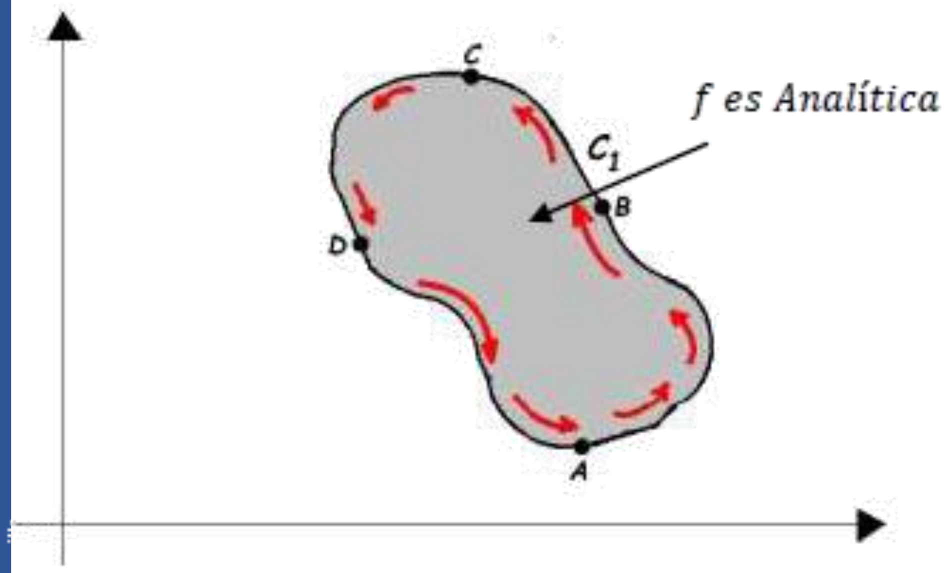
- Sea R una región en el plano complejo y C su frontera,
- Si $f(z)$ es analítica y $f'(z)$ es continua en $R \cup C$, entonces

$$\int_{C} f(z)dz = 0$$

Corolario 1 de Cauchy-Goursat

- La integral de una función analítica a lo largo de una trayectoria abierta es independiente de dicha trayectoria, siempre que se mantenga analítica entre la curva dada y la curva elegida como se muestra en la Figura

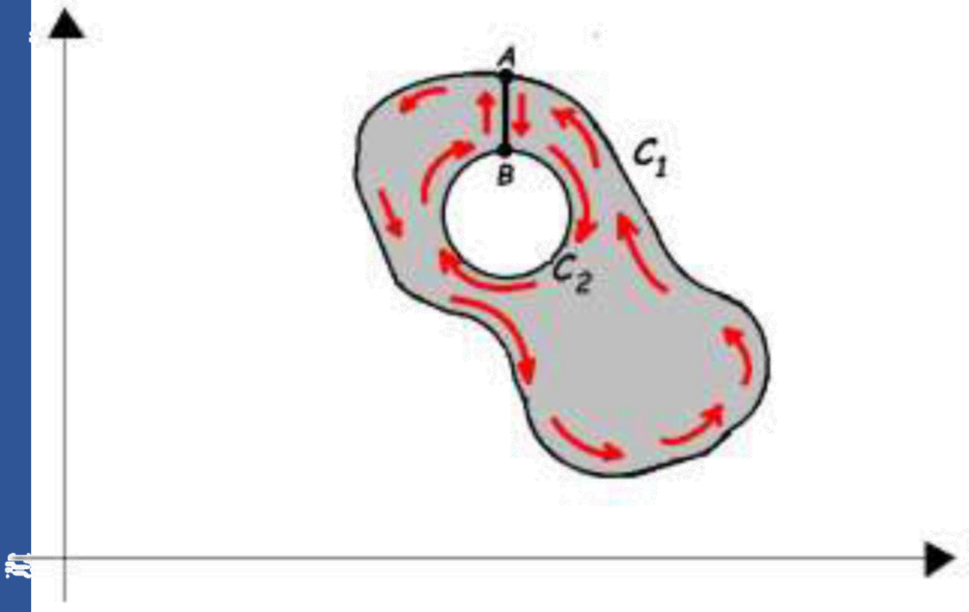
$$\oint_{\widehat{ABC}} f(z)dz = \oint_{\widehat{ADC}} f(z)dz$$



Corolario 2 de Cauchy-Goursat

- Es posible cambiar la curva de integración, siempre que se mantenga analítica en la región delimitada por la curva dada y la curva elegida
- La figura muestra una curva cerrada $C = C_1 \cup C_2$ y una curva $C_1 \cup \overline{AB} \cup C_2 \cup \overline{BA}$, entonces:

$$\oint_{c_1^+} f(z)dz = \oint_{c_2^+} f(z)dz$$

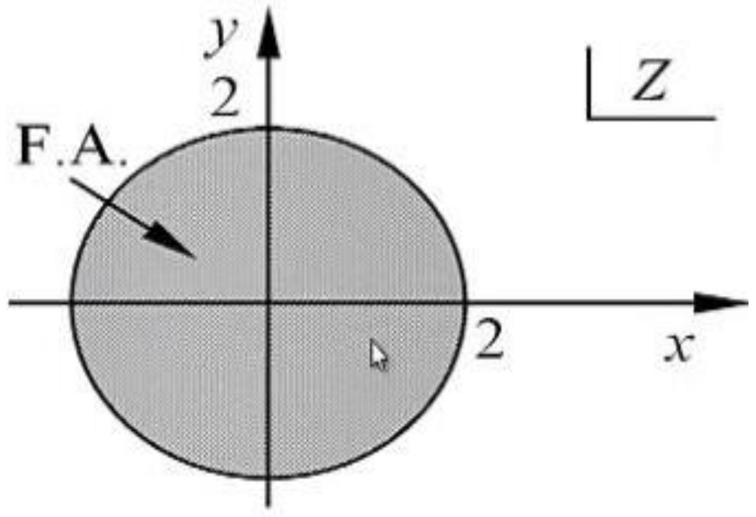


Ejemplo 1: Cauchy-Goursat

$$\oint_{|z|=2} sen(2z)e^{4iz}dz$$

- La función del integrando resulta ser entera, es decir, analítica en todo el plano complejo y, en particular, lo es en la región del plano R , que es un círculo centrado en el origen de coordenadas y de radio 2. Por lo tanto, como en R la función es analítica, tenemos que

$$\oint_{|z|=2} sen(2z)e^{4iz}dz = 0 \quad por\ C.G.$$

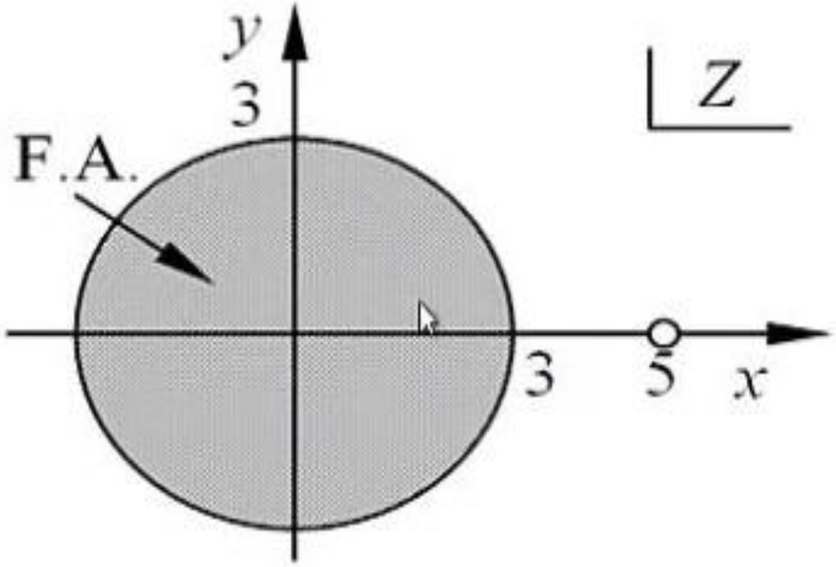


Ejemplo 1: Cauchy-Goursat

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{3z+i}}{Z-5}\,dz$$

- Tenemos que $R: |z| \leq 3$ es la región que resulta ser un círculo centrado en el origen de coordenadas y de radio 3. Y f presenta una singularidad sólo en $z = 5$. Luego, podemos ver que f es una función analítica, para todo z en $\mathbb{C}$ menos en el punto 5, pero $z = 5 \ \notin R$. De modo que en R, f es analítica.

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{3z+i}}{Z-5}\,dz = 0 \quad por\ C.G.$$

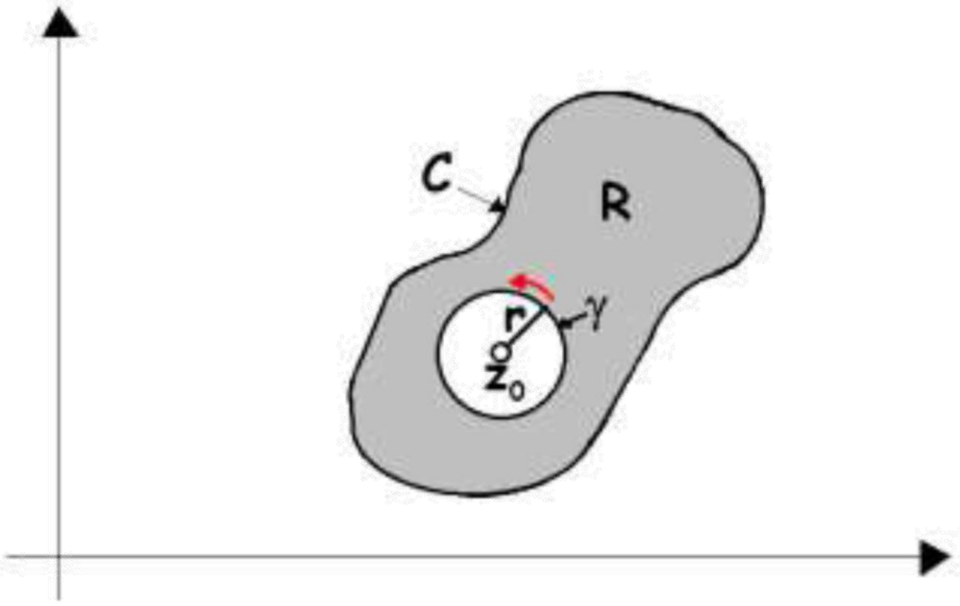


Fórmula Integral de Cauchy

- Sea $\boldsymbol{R}$ una región en el plano complejo y $\boldsymbol{C}$ su frontera, si $\boldsymbol{f(z)}$ es analítica en $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{z = z_0}$ un punto interior a $\boldsymbol{R}$, entonces

$$\oint_{c^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

La curva $\boldsymbol{\gamma}$ es una curva dentro de la región $\boldsymbol{R}$



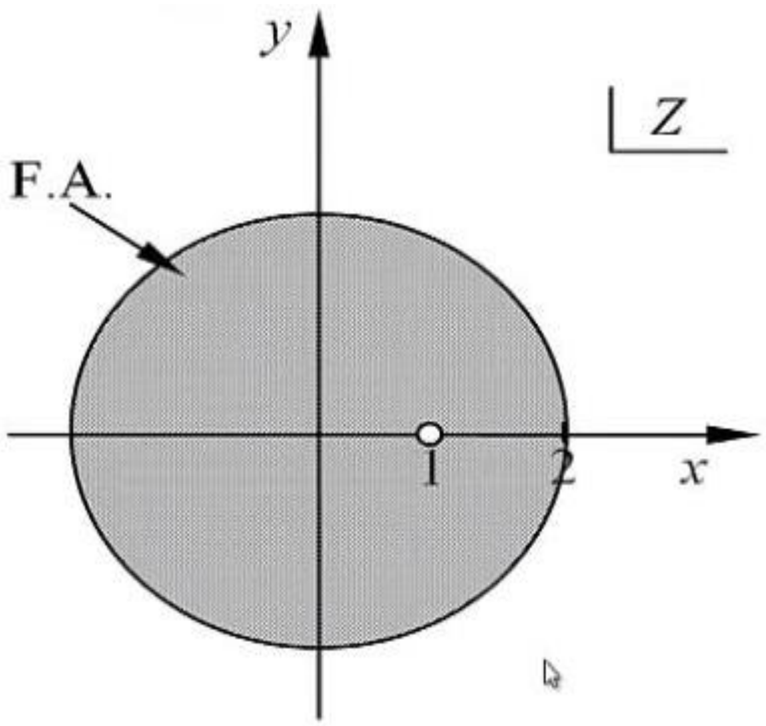
$\boldsymbol{\gamma: |z - z_0| = r}$ **donde** $\boldsymbol{\gamma \subset R}$

Ejemplo 1: Fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z^2)}{Z-1} dz$$

- Tenemos que $R: |z| \leq 2$ es la región que resulta ser un círculo centrado en el origen de coordenadas y de radio 2. Y f presenta una singularidad sólo en $z = 1$ y $z = 1 \in R$. Luego, podemos ver que $f = \cos(\pi z^2)$ es una función analítica en R.
- Luego por el Teorema de la Integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z^2)}{Z-1} dz = 2\pi i f(1)$$

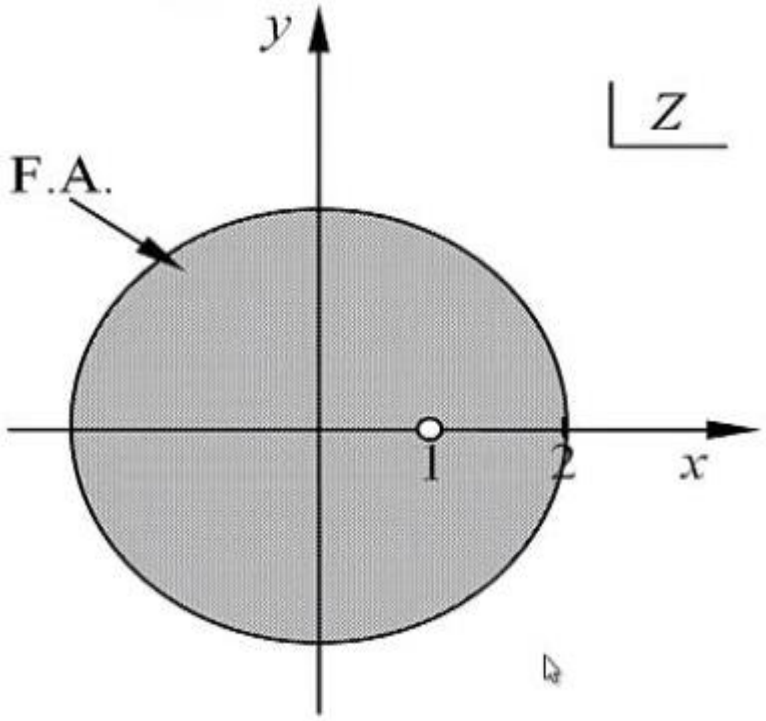


Ejemplo 1: Fórmula integral de Cauchy

- Calculamos $f(1) = \cos(\pi(1)^2) = \cos(\pi) = -1.$

- Entonces

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z^2)}{Z-1}\,dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i$$

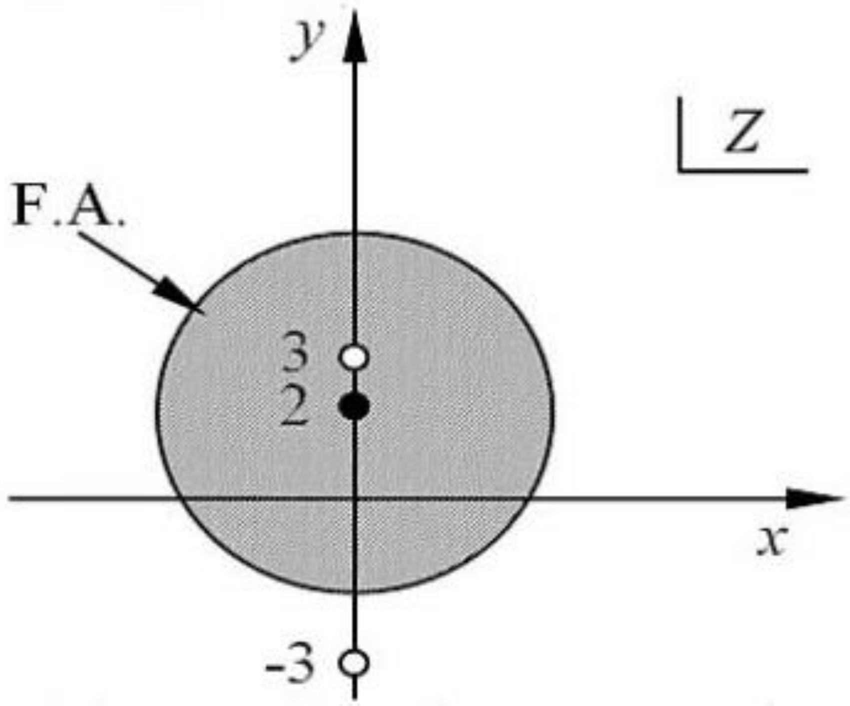


Ejemplo 2: Fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 - i}{z^2 + 9} dz$$

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 - i}{(z-3i)(z+3i)} dz$$

- Tenemos que $R: |z - 2i| \leq 4$ es la región que resulta ser un círculo centrado en $z = 2i$, que es el plano complejo de coordenadas (0,2) y de radio 4. Y la función del integrando presenta dos singularidades : $z = 3i \ \in R$ y $z = -3i \ \notin R$
- Luego, podemos ver que $f(z) = \frac{z^2 - i}{(z+3i)}$ es una función analítica en R..

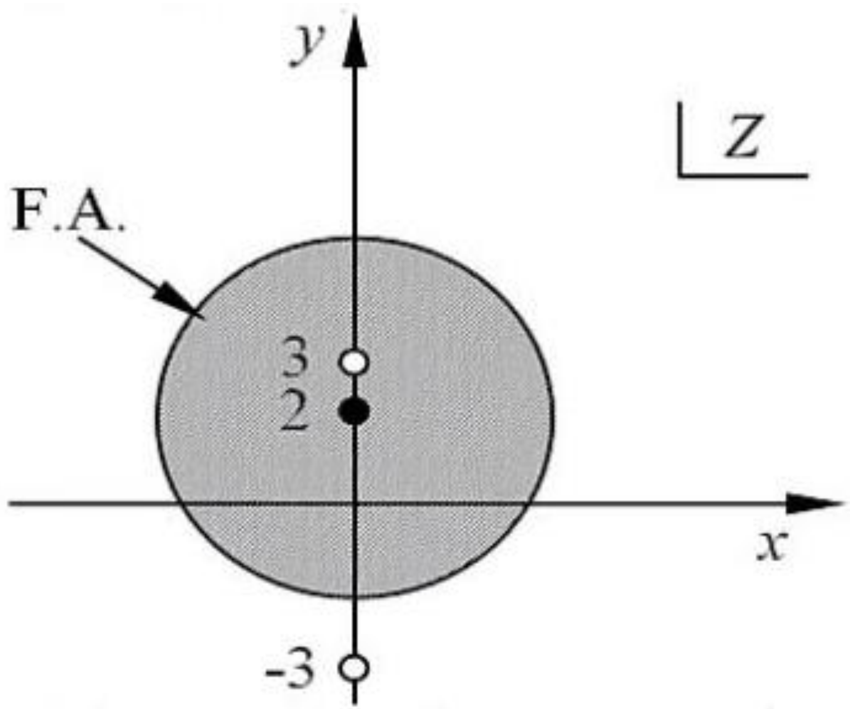


Ejemplo 2: Fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 - i}{z^2 + 9} dz$$

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{\boxed{z^2 - i}}{(z - 3i)\boxed{(z + 3i)}} dz$$

- La función que consideramos es $f(z) = \frac{z^2 - i}{(z+3i)}$ es una función analítica en R..



Ejemplo 2: Fórmula integral de Cauchy

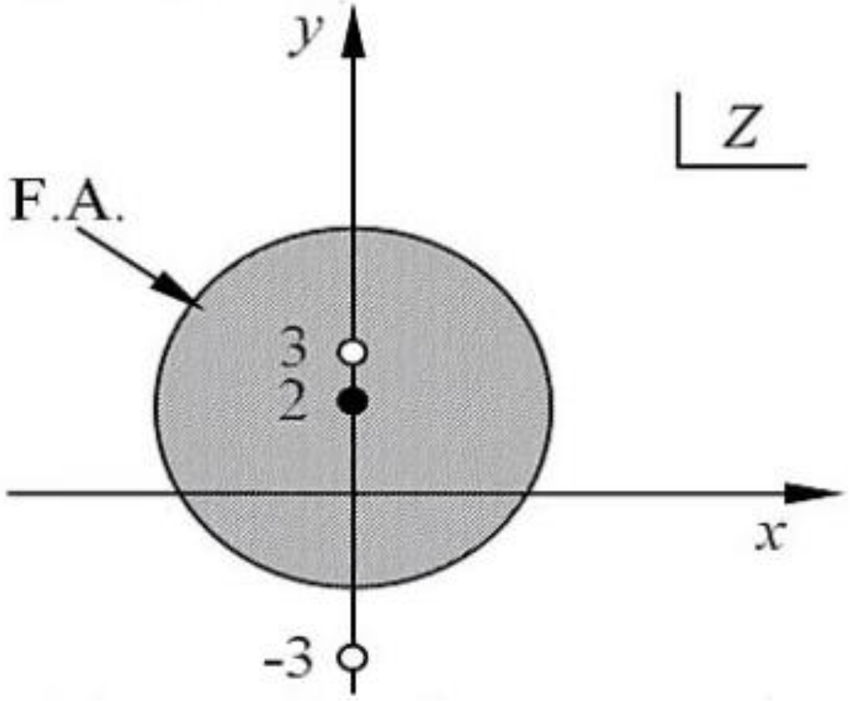
Aplicando el Teorema de la Fórmula integral de Cauchy, tenemos:

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 - i}{(z-3i)(z+3i)} dz = 2\pi i f(3i)$$

- Calculamos $f(3i) = \frac{(3i)^2 - i}{(3i+3i)} = \frac{-9-i}{6i}$

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 - i}{(z-3i)(z+3i)} dz = 2\pi i \left(\frac{-9-i}{6i} \right) = \frac{\pi}{3}(-9-i)$$

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 - i}{(z-3i)(z+3i)} dz = -3\pi - \frac{\pi}{3} i$$

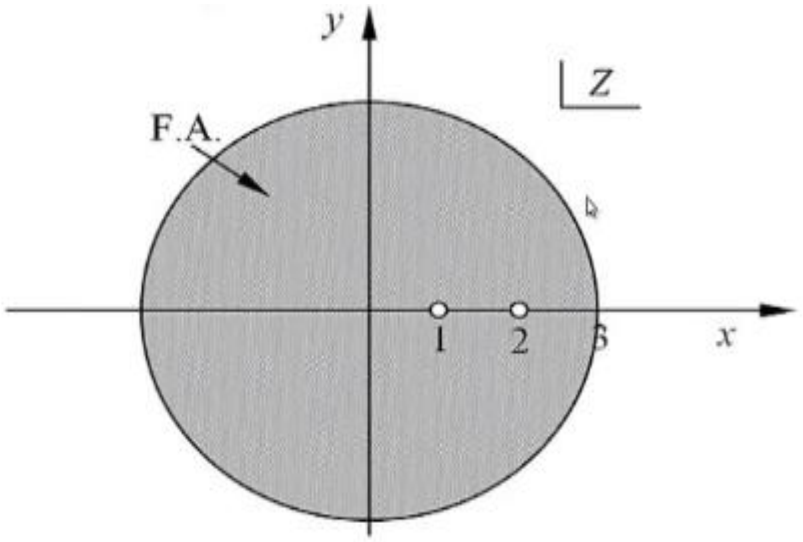


Ejemplo 3: Fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz$$

- Factorizando el denominador tenemos

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}\,dz$$



Tenemos que $R\colon |z| \leq 3$ es la región que resulta ser un círculo centrado en el origen de coordenadas y de radio 3. Y la función del integrando presenta singularidades: en $z = 1 \in R$ y $z = 2 \in R$. Es decir la región tiene dos singularidades.

Ejemplo 3: Fórmula integral de Cauchy

- Utilizando el método de fracciones parciales

$$\frac{2z-3}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

Resolviendo las fracciones

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)}$$

$$2z-3 = A(z-2)+B(z-1)$$

Sustituyendo los puntos $z_0 = 1$ y $z_0 = 2$

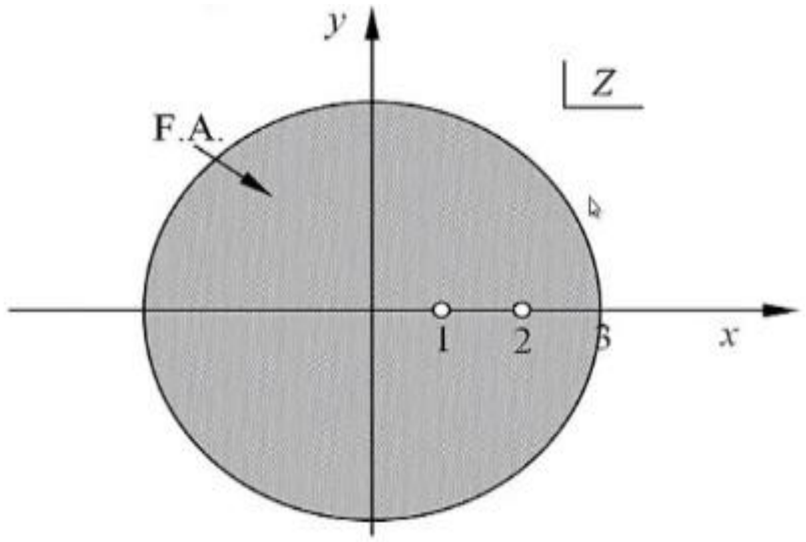
Para $z = 1$ $\quad 2(1)-3 = A(1-2)+B(1-1)$

$$-1 = -A$$

$$A = 1$$

Para $z = 2$ $\quad 2(2)-3 = A(2-2)+B(2-1)$

$$1 = B$$



Ejemplo 3: Fórmula integral de Cauchy

- Sustituyendo en las fracciones originales, tenemos:

$$\frac{2z-3}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

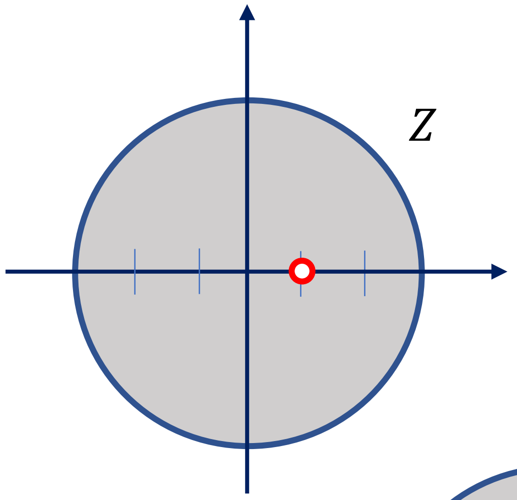
La integral se convierte en:

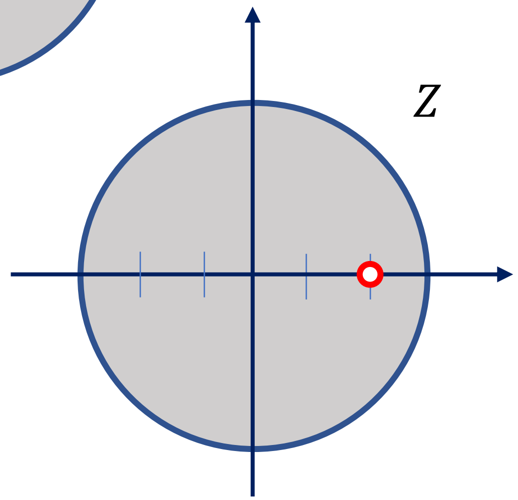
$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = \oint_{|z|=3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\right) dz$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = \oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1}\,dz + \oint_{|z|=3} \frac{1}{z-2}\,dz$$

Aplicando el Teorema de la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = 2\pi i f_1(1) + 2\pi i f_2(2)$$





Ejemplo 3: Fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = 2\pi i(1) + 2\pi i(1)$$

Dando como resultado

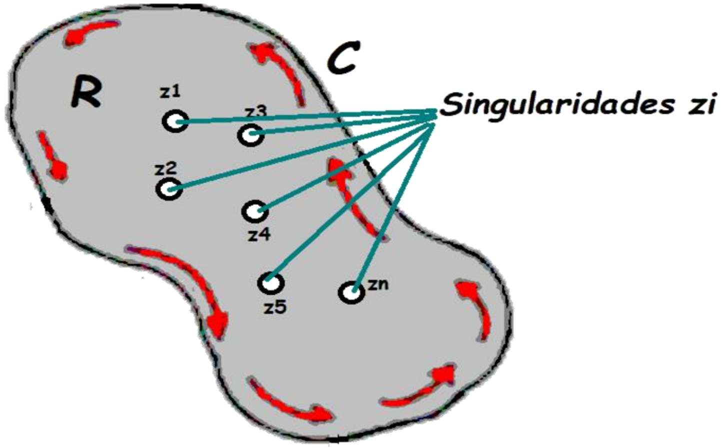
$$\boxed{\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = 4\pi i}$$

Corolario del Teorema de la Integral de Cauchy

- Sea R una región en el plano complejo y C su frontera,
- Si f(z) es analítica en RUC, z = z , entonces

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_n)}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} f_k(z_k)$$

f es analítica en RUC, excepto en las zi

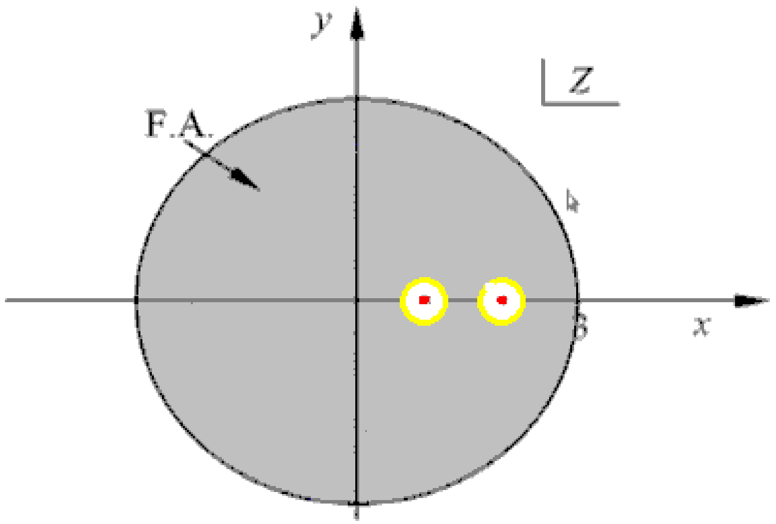


Ejemplo : Corolario del Teorema de la Integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz$$

- Factorizando el denominador tenemos

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}\,dz$$



Tomamos dos circunferencias cuyos respectivos centros son $z_0 = 1$ y $z_0 = 2 \in R$ con un radios de $r = \frac{1}{4}$, de modo que su intersección sea vacía.

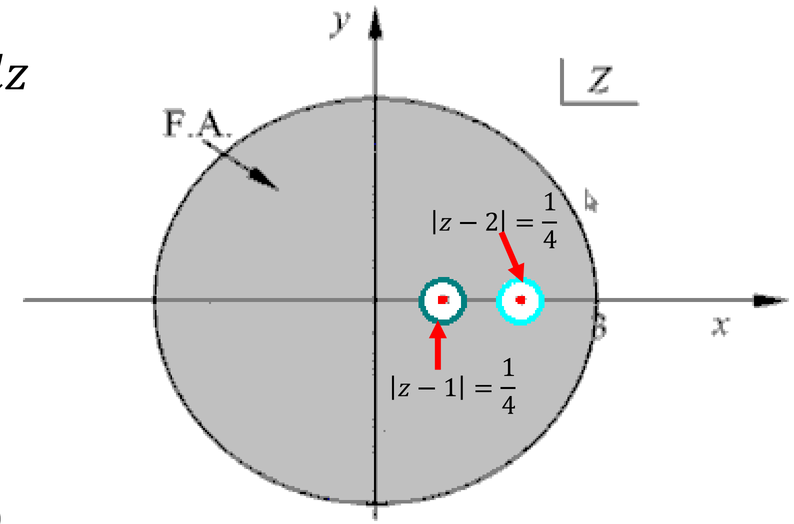
Ejemplo : Corolario del Teorema de la Integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{4}} \frac{\overbrace{\boxed{2z-3}}^{f_1(z)}}{\underbrace{(z-1)}_{z-z_0}\boxed{(z-2)}}\,dz + \oint_{|z-2|=\frac{1}{4}} \frac{\overbrace{\boxed{2z-3}}^{f_2(z)}}{\boxed{(z-1)}\underbrace{(z-2)}_{z-z_0}}\,dz$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = 2\pi i f_1(1) + 2\pi i f_2(2)$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{2(1)-3}{1-2}\right) + 2\pi i\left(\frac{2(2)-3}{2-1}\right) = 2\pi i(1) + 2\pi i(1)$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z-3}{z^2-3z+2}\,dz = 4\pi i$$



Teorema de las Derivadas de Cauchy

Sea R una región en el plano complejo y C su frontera.

Si $f(z)$ es analítica en $R \cup C$, $z = z_0$ un punto interior a R, entonces

$$\oint_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z_0)$$

- En el caso particular de $n = 0$, se obtiene el enunciado de la *Fórmula Integral de Cauchy*, pues $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ y $0! = 1$

Ejemplo 1:Teorema de las Derivadas de Cauchy

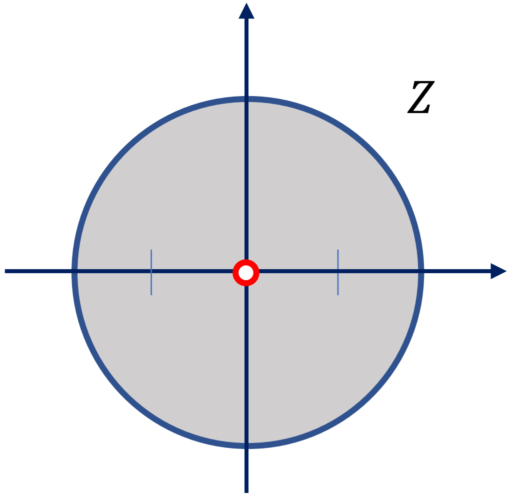
$$\oint_{c^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Encontrar la integral de

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2}$$

Aplicando el teorema de las derivadas de Cauchy

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2} = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-0)^2} = \frac{2\pi i}{1!} f'(0)$$



- Donde $f(z) = 1$, entonces $f'(z) = 0$, luego $f'(0) = 0$

Ejemplo 1:Teorema de las Derivadas de Cauchy

- Por lo tanto

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \ (0)$$

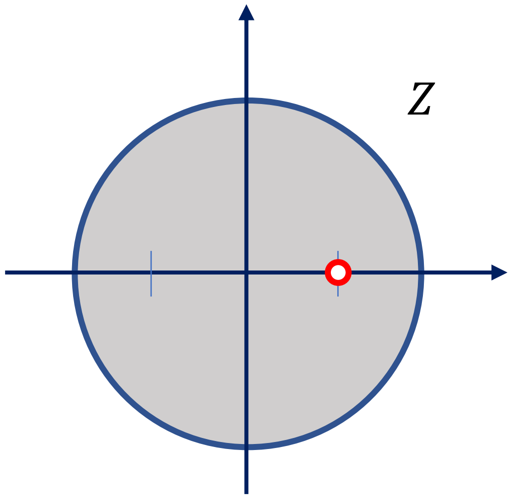
$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2} = 0$$

Ejemplo 2:Teorema de las Derivadas de Cauchy

Encontrar la integral de

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-1)^3}\,dz$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)}$$



Aplicando el teorema de las derivadas de Cauchy

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1)$$

- Donde $f(z) = z^4$, entonces $f'(z) = 4z^3$ y $f''(z) = 12z^2$, luego $f''(1) = 12$

Ejemplo 2:Teorema de las Derivadas de Cauchy

- Por lo tanto

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot (12)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-1)^3} dz = 12\pi i$$

Corolario del Teorema de las Derivadas de Cauchy

- *Una función analítica admite derivadas de todos los órdenes y por lo tanto, éstas son funciones analíticas también.*