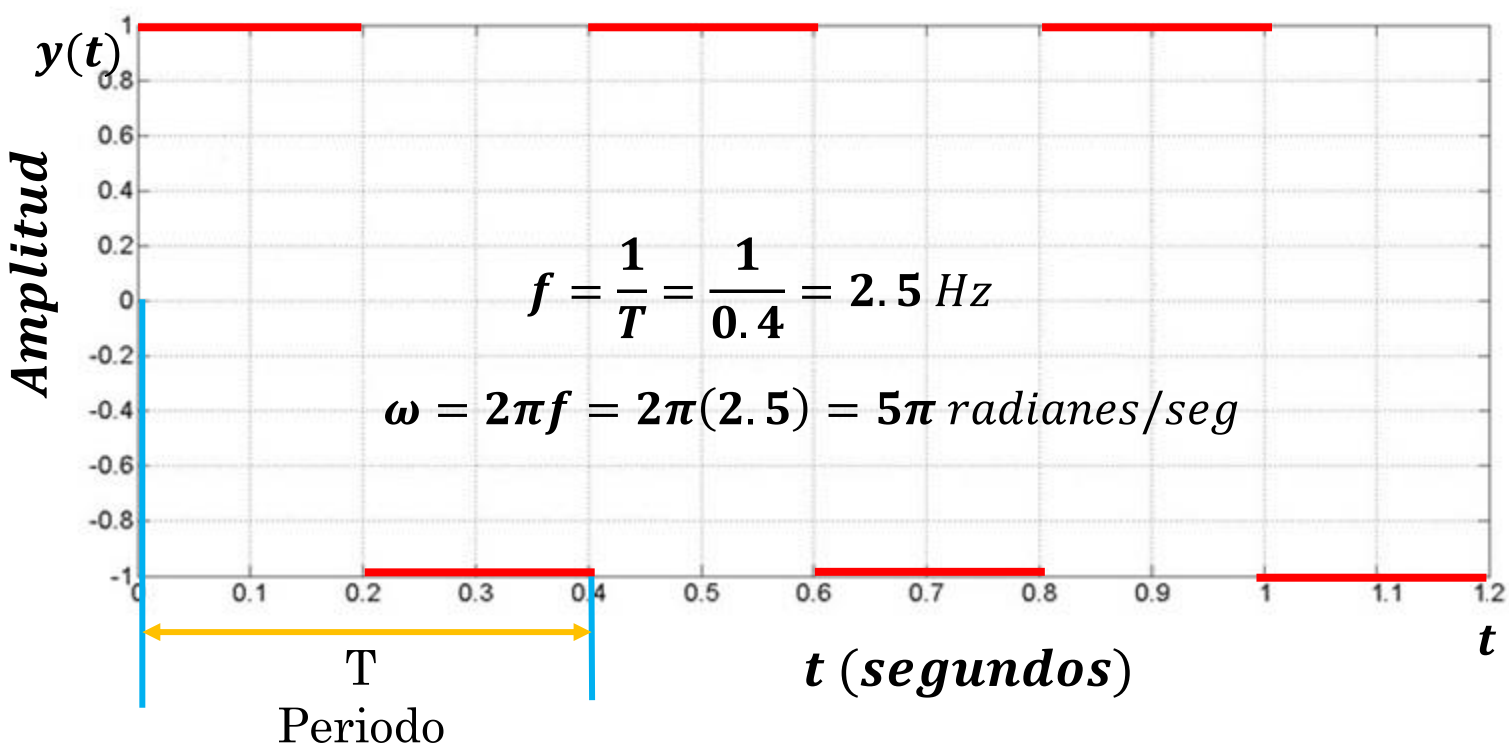
Representación de señales utilizando series de Fourier trigonométricas

Dr. José Federico Ramírez Cruz

Serie trigonométrica de Fourier

- Una serie de Fourier es una forma matemática para representar una *función periódica no-trigonométrica* mediante una suma infinita de funciones trigonométricas

Señal Rectangular Periódica



Serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\pi t) + \cdots \quad para\ -\pi < t < \pi$$

$\frac{1}{2}$

$\omega_0 = \pi$

$\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)$

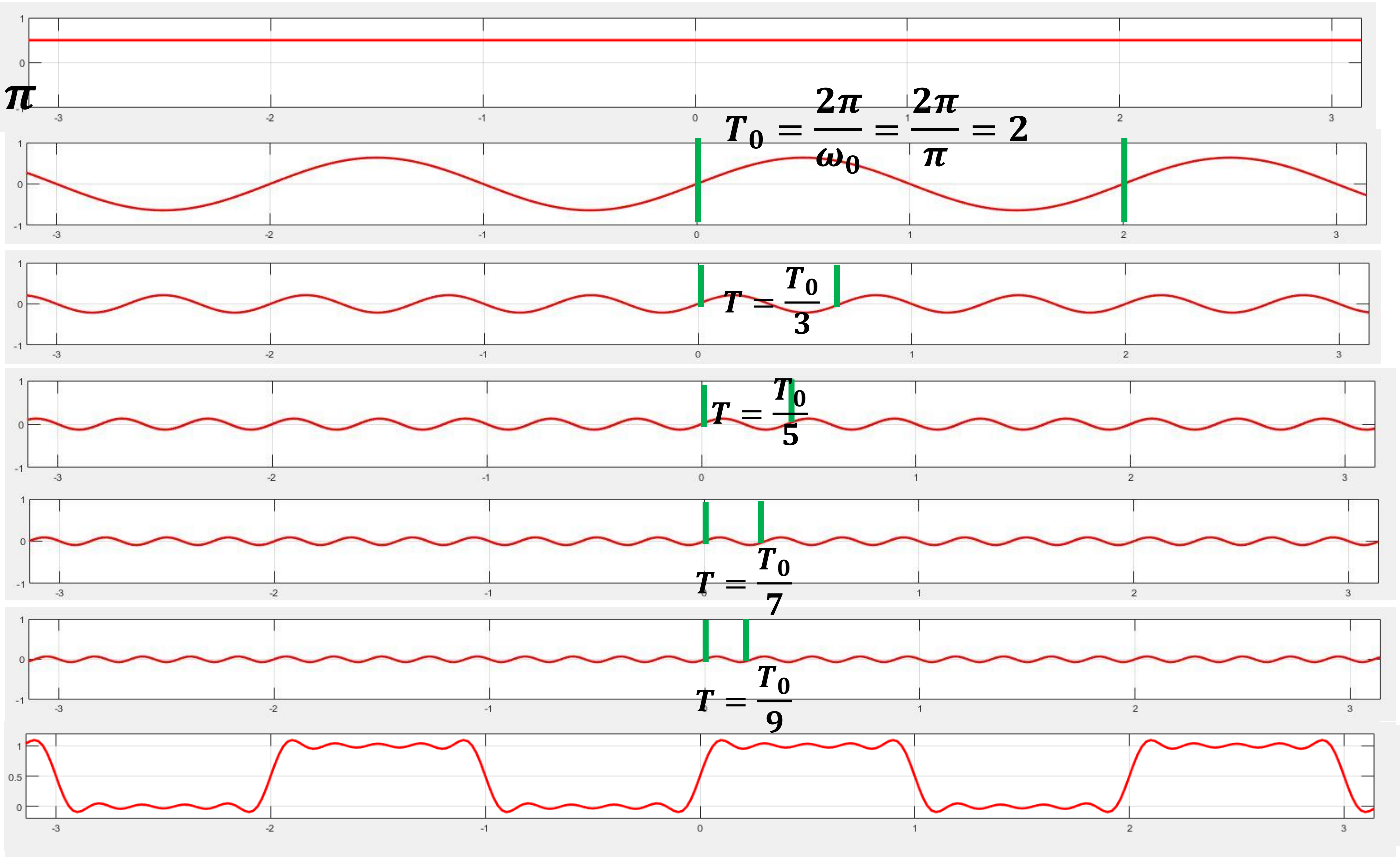
$3\omega_0$ $\frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t)$

$5\omega_0$ $\frac{2}{5\pi}\sin(5\pi t)$

$7\omega_0$ $\frac{2}{7\pi}\sin(7\pi t)$

$9\omega_0$ $\frac{2}{9\pi}\sin(9\pi t)$

$f(t)$



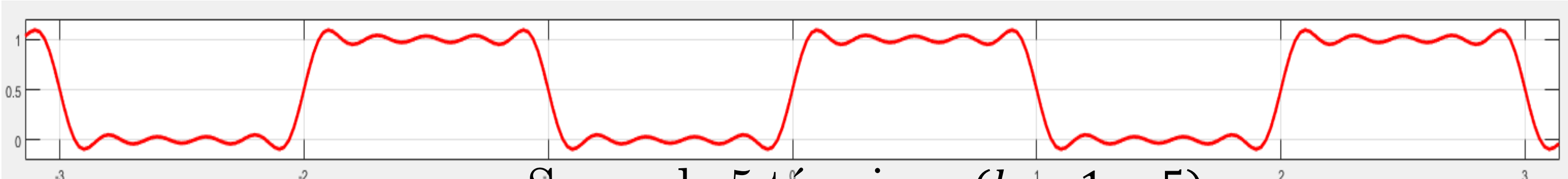
Serie trigonométrica de Fourier

- Para $t = -\pi \; a \; \pi$, la serie de Fourier

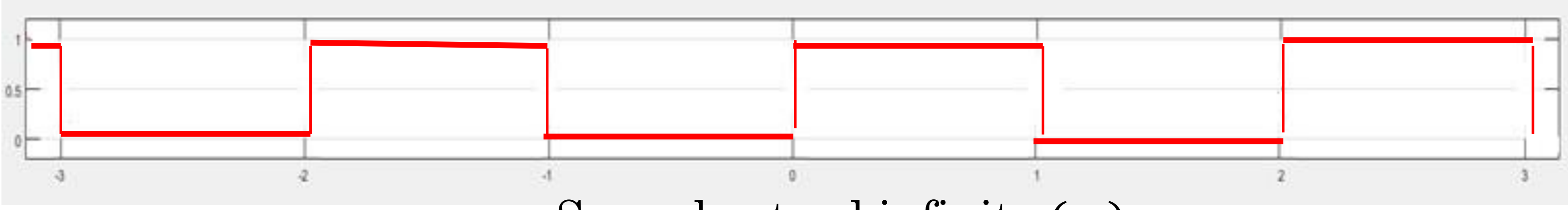
$$f(t) = \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{2}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\pi t) + \cdots}$$

- Se puede expresar

$$f(t) = \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi t)} \qquad donde\; n = 2k - 1$$



Suma de 5 términos ($k = 1 \cdots 5$)



Suma hasta el infinito (∞)

Serie trigonométrica de Fourier

- La serie de Fourier es una Suma infinita que tiene la expresión

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{\text{Término Constante O término de DC}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)}_{\text{Términos dependientes de la frecuencia o términos de AC}}$$

Donde la frecuencia angular $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

ω es la frecuencia angular en radianes/segundo

f es la frecuencia en ciclos/segundo o Hertz

T es el Periodo de la señal

Coeficientes de la serie de Fourier

- Para encontrar la serie debemos calcular los valores de las constantes $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_n}$ y $\boldsymbol{b_n}$, que se llaman ***Coeficientes*** de la Serie de Fourier

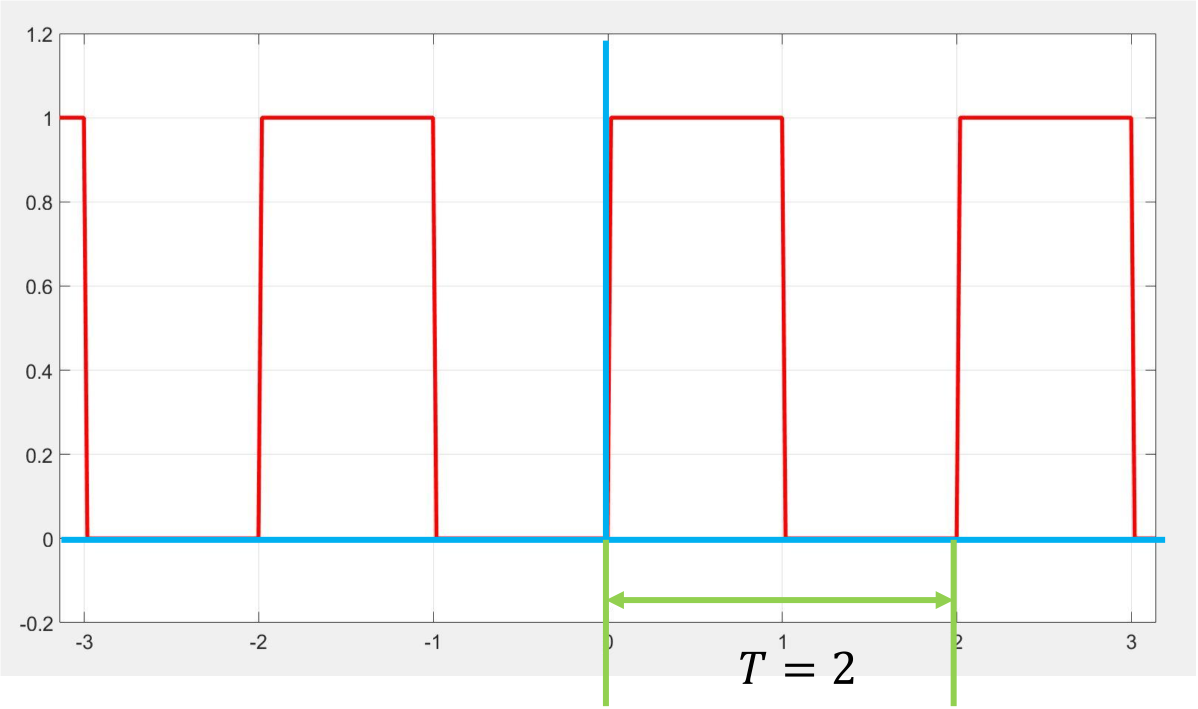
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Serie de Fourier de una señal

- Calcular la serie de Fourier de la siguiente señal



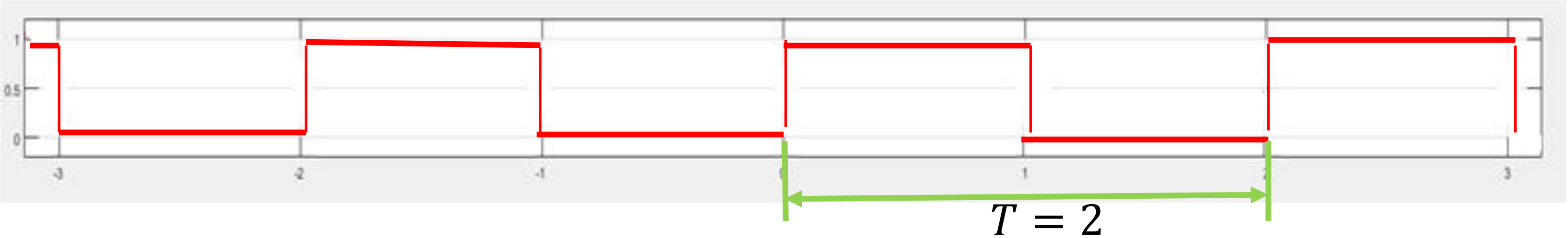
$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

Calcular a_0

- La serie de Fourier trigonométrica se define como:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

- La función $f(t)$ es



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1)\,dt + \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_1^2 (0)\,dt} = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}[t]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$

Calcular a_n

- La función $f(t)$ es

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \pi \qquad T = 2$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \cancel{\frac{2}{2}}\int_0^1 (1)\cos(n\pi t)dt + \cancelto{0}{\frac{2}{2}\int_1^2 (0)\cos(n\omega t)\,dt}$$

$$a_n = \int_0^1 \cos(n\pi t)\,dt = \frac{1}{n\pi}[\sin(n\pi t)]_0^1 = \frac{1}{n\pi}[\cancelto{0}{\sin(n\pi)} - \cancelto{0}{\sin(0)}]$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

Calcular b_n

- El coeficiente b_n es

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \cancel{\frac{2}{2}}\int_0^1 (1)\sin(n\pi t)dt + \cancelto{0}{\frac{2}{2}\int_1^2 (0)\sin(n\omega t)\,dt}$$

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi t)\,dt = -\frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi t)]_0^1 = -\frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi) - \cancelto{1}{\cos(0)}]$$

- Sin embargo

$$\cos(n\pi) = -1 \ \text{ cuando } \ n \ \text{ es impar}$$
$$\cos(n\pi) = \ \ 1 \ \text{ cuando } \ n \ \text{ es par}$$

- por lo tanto

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[-1-1] = \boxed{\frac{2}{n\pi} \ \text{ cuando } \ n \ \text{ es impar}}$$
$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[1-1] = \boxed{0 \ \text{ cuando } \ n \ \text{ es par}}$$

SUSTITUYENDO a_0, a_n Y b_n EN LA SERIE

- La serie de Fourier trigonométrica se define como:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

- Los coeficientes de la serie son

$a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ y $b_n = \frac{2}{n\pi}$ cuando n es impar y $b_n = 0$ cuando es par

- Sustituyendo en la serie

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((0)\cos(n\omega t) + \frac{2}{n\pi}\sin(n\omega t) \right) \quad para\ n\ impar$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi t) \quad para\ n\ impar$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\pi t) + \cdots}$$