Representación de señales usando serie compleja de Fourier

Dr. José Federico Ramírez Cruz

Serie compleja de Fourier

- La serie de Fourier también puede expresarse como una exponencial compleja:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}, \qquad -\infty < t < \infty$$

donde

- c_0 es un número real
- c_k son, en general, son números complejos para $k \neq 0$
- ω_0 es la frecuencia fundamental (en rad/s).

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- T es el periodo fundamental

Cálculo de los coeficientes a partir de las series trigonométricas

- Los coeficientes c_k de las exponenciales complejas pueden calcularse a partir de los coeficientes de la serie de Fourier trigonométricas, dadas mediante las siguientes fórmulas:

$$c_0 = a_0$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

$$k = 1,2,\cdots$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\pi t) + \cdots$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = -\infty < t < \infty$$

- $c_0 = a_0 = \frac{1}{2},$
- $c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}j\frac{2}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}j \;\; para\ k\ impar$
- $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}j\frac{2}{k\pi} = \frac{1}{k\pi}j \;\; para\ k\ impar$

- $c_0 = \frac{1}{2},$
- $c_k = -\frac{1}{k\pi}j;\ c_1 = -\frac{1}{\pi}j;\ c_3 = -\frac{1}{3\pi}j$
- $c_{-k} = \frac{1}{k\pi}j\colon\ c_{-3} = \frac{1}{3\pi}j;\quad c_{-1} = \frac{1}{\pi}j$

Sustituyendo en

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = -\infty < t < \infty$$

$$f(t) = \frac{1}{3\pi}je^{-3\pi jt} + \frac{1}{\pi}je^{-\pi jt} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}je^{\pi jt} - \frac{1}{3\pi}je^{3\pi jt}$$

Cálculo de los coeficientes a partir de la función $y(t)$

- Además, los coeficientes c_k pueden calcularse directamente de la señal $y(t)$, mediante la fórmula

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \qquad para\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$$

- También puede calcularse como

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \qquad para\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$$

Cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica a partir de los coeficientes de la serie compleja

- Los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier también pueden calcularse a partir de la serie compleja

$$a_0 = c_0$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2Re(c_k)$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}) = -2Im(c_k)$$

Para $k = 1,2,\ldots$

- Donde Re y Im es la parte real e imaginaria de un número complejo.